



Universidade do Minho

Instituto de Educação e Psicologia

O trabalho colaborativo como meio de desenvolvimento do conhecimento didáctico de professores de Matemática no tema de Análise Combinatória.

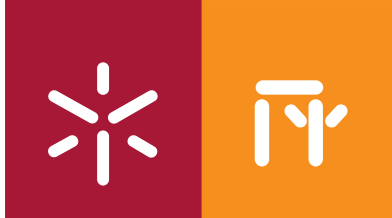
Bárbara Vilamarim do Alvar de Carvalho

Bárbara Vilamarim do Alvar de Carvalho

O trabalho colaborativo como meio de desenvolvimento do conhecimento didáctico de professores de Matemática no tema de Análise Combinatória.

UMinho | 2009

Junho de 2009



Universidade do Minho

Instituto de Educação e Psicologia

Bárbara Vilamarim do Alvar de Carvalho

**O trabalho colaborativo como meio de
desenvolvimento do conhecimento didático
de professores de Matemática no tema de
Análise Combinatória.**

Dissertação de Mestrado em Educação
Área de Especialização em Supervisão Pedagógica
em Ensino da Matemática

Trabalho realizado sob a orientação do
Doutor José António Fernandes

Junho de 2009

DECLARAÇÃO

Nome: Bárbara Vilamarim do Alvar de Carvalho
Endereço electrónico: barbara.alvar@gmail.com
Telefone: 919666215
Número do Bilhete de Identidade: 7508079

Título da tese: O trabalho colaborativo como meio de desenvolvimento do conhecimento didáctico de professores de Matemática no tema de Análise Combinatória

Orientador:
Doutor José António Fernandes

Ano de conclusão: 2009

Mestrado em Educação, Área de Especialização em Supervisão Pedagógica em Ensino da Matemática

É autorizada a reprodução integral desta tese apenas para efeitos de investigação, mediante declaração escrita do interessado, que a tal se compromete.

Universidade do Minho, 4 de Junho de 2009

AGRADECIMENTOS

Ao Doutor José António Fernandes a minha sincera gratidão, pelos seus conselhos, incentivo e críticas, pela compreensão e amizade que sempre demonstrou para comigo ao longo da concretização deste estudo.

Às participantes e aos seus alunos agradeço o contributo imprescindível para a realização deste trabalho, a disponibilidade, o interesse e empenho revelados.

Aos Conselhos Executivos das Escolas onde decorreu a investigação agradeço a abertura e disponibilidade demonstradas.

À minha grande amiga Elisa que me acompanhou ao longo deste percurso, pela ajuda, incentivo e coragem que sempre me deu, tendo sido incansável e mostrando-se sempre disponível para me ajudar.

Ao amigo Almeida pelo encorajamento e instigação ao meu envolvimento em novas investidas no sentido de potenciar o meu desenvolvimento profissional.

Ao meu filho e ao meu marido que tanto apoio, incentivo e amor me concederam.

O TRABALHO COLABORATIVO COMO MEIO DE DESENVOLVIMENTO DO CONHECIMENTO DIDÁCTICO DE PROFESSORES DE MATEMÁTICA NO TEMA DE ANÁLISE COMBINATÓRIA

Bárbara Vilamarim do Alvar de Carvalho

Mestrado em Educação, Área de Especialização em Supervisão Pedagógica em Ensino da Matemática

Universidade do Minho, 2009

RESUMO

Neste estudo investigou-se o impacto do trabalho colaborativo no desenvolvimento do conhecimento didáctico em Combinatória de duas professoras, centrado nas duas questões de investigação seguintes: 1. O trabalho colaborativo é facilitador da promoção de uma atitude reflexiva e investigativa dos professores, face às dificuldades apresentadas pelos alunos em Combinatória?; e 2. De que forma o trabalho colaborativo se reflecte no desenvolvimento do conhecimento didáctico dos professores em Combinatória?

Na investigação realizada adoptou-se uma metodologia de estudo de caso (Bogdan & Biklen, 1994; Ponte, 1994; Yin, 2005), em que Maria e Margarida constituíram os casos estudados e a investigadora assumiu um papel de “observadora participante”. A recolha de dados efectuou-se entre Setembro e Dezembro de 2008 e foi feita através de duas entrevistas às professoras – uma antes e outra depois da leccionação da Combinatória, notas de campo, registos escritos produzidos pelas participantes e da observação de aulas e das sessões de trabalho. Nas sessões de trabalho, num total de 14 e com uma duração média de duas horas, planificou-se a actividade pedagógica a implementar e reflectiu-se sobre a sua concretização. A análise de dados foi realizada de forma contínua durante o processo de recolha dos dados, organizando e interpretando os factos, numa perspectiva de regulação e aferição das questões de investigação (Bogdan & Biklen, 1994), e aprofundou-se após a conclusão da sua recolha.

Em termos de resultados obtidos, evidencia-se a importância do trabalho desenvolvido ao longo das sessões como oportunidade das duas professoras problematizarem e questionarem as suas concepções e práticas de ensino. Margarida, partindo de uma atitude de maior abertura e predisposição à mudança, aprofundou ainda mais tal atitude; enquanto Maria, mostrando-se inicialmente convicta e confiante nas suas práticas, apenas pelo fim da experiência questionou algumas dessas práticas, com escassa repercussão na sala de aula. Além disso, a análise e reflexão realizadas pelas professoras revelaram a valorização de tarefas exploratórias, das estratégias espontâneas dos alunos e das ideias erradas. A par disto, verificou-se o desenvolvimento de uma consciência crescente de que a mudança de estratégias na prática lectiva é possível a partir do envolvimento e esforço pessoais, apoiada num trabalho conjunto e instigador do desenvolvimento do conhecimento didáctico das professoras.

THE COOPERATIVE WORK AS A MEANS TO DEVELOP THE DIDACTIC KNOWLEDGE OF THE TEACHERS OF MATHEMATICS OF COMBINATORICS

Bárbara Vilamarim do Alvar de Carvalho
Master of Arts, Supervision in Mathematic Teaching
Minho University, 2009

ABSTRACT

In this study the impact of collaborative work on the development of the didactic knowledge of Combinatorics of two teachers was researched. It was centered on two research questions: 1. Does collaborative work enhance a reflexive and investigative attitude of the teachers, regarding the difficulties students meet in Combinatorics?; and 2. In what way does the collaborative work reflect on the development of the didactic knowledge of the teachers in Combinatorics?

In the research a case study methodology was carried out (Bogdan & Biklen, 1994; Ponte, 2004; Yin, 1989) being Maria and Margarida the study cases while the investigator assumed the role of “participating observer”. Data were gathered between September and December 2008 by means of: two interviews to the teachers – one before and one after Combinatorics was taught; written records made by the participants, and class and work sessions observation.

In these 14, circa two-hour-long-sessions the pedagogic activity to be implemented was designed and its realization was reflected. Data analysis was processed in a continuous way, by organizing and interpreting the facts, so as to measure and regulate the investigation questions (Bogdan & Biklen, 1994). After concluding the process, careful consideration was intensified.

From the analysis, the importance of the collaborative work developed along the sessions stood out, as it gave the two teachers the opportunity to problematize and question their conceptions and teaching practices. Margarida, displaying a broader and more prone attitude to change went deeper in that posture, while Maria, showing herself more convinced of the righteousness of her attitudes and practices only by the end of the experience did she question some of them; hence, the repercussion was hardly felt in the classroom. Furthermore, the analysis and the reflection carried out by the teachers valued the exploratory tasks, the students’ spontaneous strategies and the wrong conceptions. Entwined, a growing awareness that the change of strategies in the teaching practice is possible was felt, provided personal commitment and effort line up.

That change will occur if supported by collaborative work, arouser of the development of the didactic knowledge of the teachers.

ÍNDICE

DECLARAÇÃO	ii
AGRADECIMENTOS	iii
RESUMO	iv
ABSTRACT	v
ÍNDICE	vi
LISTA DE QUADROS	ix
CAPÍTULO 1 – INTRODUÇÃO	1
1.1. Problema e questões de investigação	1
1.2. Relevância do estudo	5
CAPÍTULO 2 – REVISÃO DE LITERATURA	9
2.1. A importância da Análise Combinatória	9
2.1.1. Ensino e aprendizagem da Combinatória	12
2.1.2. O papel da intuição	22
2.1.3. Dificuldades dos alunos na resolução de problemas de Combinatória	26
2.1.4. Intervenções de ensino em Combinatória	28
2.2. Concepções dos professores em Combinatória	31
2.3. Conceito e papel da reflexão	33
2.3.1. Conceito de reflexão	33
2.3.2. Estratégias de reflexão/formação	37
2.4. O conhecimento profissional do professor	40
2.4.1. A perspectiva de Shulman sobre o conhecimento docente	41
2.4.2. Estruturação do conhecimento docente	44
2.4.3. A formação em didáctica	46
2.5. O trabalho colaborativo	51
CAPÍTULO 3 – METODOLOGIA DA INVESTIGAÇÃO	57
3.1. Opções metodológicas	57

3.2. Participantes	60
3.3. Métodos de recolha de dados	62
3.3.1. Observação	63
3.3.2. Entrevistas.....	65
3.3.3. Documentos	67
3.4. Análise de dados	68
CAPÍTULO 4 – APRESENTAÇÃO DOS RESULTADOS	73
4.1. Descrição das sessões de trabalho e planificação do tema	73
4.1.1. Tarefa introdutória	81
4.1.2. Arranjos simples e permutações	85
4.1.3. Combinações	86
4.1.4. Triângulo de Pascal	86
4.1.5. Binómio de Newton	87
4.2. O caso Maria.....	87
4.2.1 Apresentação	87
4.2.2 Práticas pedagógicas e reflexão	90
4.2.3 Conhecimento didáctico.....	112
4.2.4 Trabalho colaborativo.....	137
4.3. O caso Margarida	141
4.3.1. Apresentação	141
4.3.2. Práticas pedagógicas e reflexão	144
4.3.3. Conhecimento didáctico.....	177
4.3.4. Trabalho colaborativo.....	193
CAPÍTULO 5 – CONCLUSÕES	199
5.1. Síntese do estudo	199
5.2. Conclusões.....	203
5.2.1. O trabalho colaborativo é facilitador da promoção de uma atitude reflexiva e investigativa dos professores, face às dificuldades apresentadas pelos alunos em Combinatória?	206

5.2.2. De que forma o trabalho colaborativo se reflecte no desenvolvimento do conhecimento didáctico dos professores em Combinatória?	210
5.3. Recomendações para futuras investigações.....	217
BIBLIOGRAFIA.....	219
ANEXO I	227
ANEXO II.....	235
ANEXO III.....	243

LISTA DE QUADROS

Quadro 1	Procedimentos combinatórios segundo Batanero et al. (1994,1997a)	16
Quadro 2	Modelos combinatórios implícitos no problema segundo Batanero et al. (1994, 1997a, 1997b)	16
Quadro 3	Problemas Combinatórios segundo Batanero et al. (1997a)	17
Quadro 4	Dificuldades em Combinatória, segundo Batanero et al. (1997a, 1997b)	27
Quadro 5	Descrição de estratégias promotoras de atitudes reflexivas e de uma formação permanente dos professores	37
Quadro 6	As quatro dimensões do conhecimento didático	50
Quadro 7	Tipos de trabalho de equipa considerados por Hargreaves (1998)	53
Quadro 8	Três formas de colaboração apresentadas por Fullan e Hargreaves (2001)	54
Quadro 9	Formas de colaboração profissional entre professores segundo Little (1990)	55
Quadro 10	Dificuldades inerentes ao trabalho colaborativo	56
Quadro 11	Assuntos tratados nas sessões	73
Quadro 12	Planificação do tema de “Análise Combinatória”	75
Quadro 13	Aulas implementadas por Maria no tema de “Análise Combinatória”	76
Quadro 14	Aulas implementadas por Margarida no tema de “Análise Combinatória”	77
Quadro 15	Breve descrição das aulas observadas a cada uma das participantes	77

CAPÍTULO 1

INTRODUÇÃO

Nos estudos recentes sobre Educação, o trabalho colaborativo tem assumido um papel central, quer no desenvolvimento do profissionalismo docente, quer como veículo contributivo para o sucesso educativo.

No âmbito do Curso de Mestrado, Área de Especialização em Supervisão Pedagógica em Ensino da Matemática, propusemo-nos realizar um estudo empírico que contribuísse para clarificar em que medida o trabalho colaborativo desenvolvido por professores de Matemática do ensino secundário promove o desenvolvimento do conhecimento didáctico dos professores no tema de Análise Combinatória do 12.º ano.

Neste capítulo é apresentada a problemática do estudo, assim como as questões de investigação e a pertinência do trabalho proposto.

1.1. Problema e questões de investigação

Nos últimos tempos, a Educação tem vindo a sofrer constantes mudanças paradigmáticas. Entre elas, a recente publicação do Estatuto da Carreira Docente (ECD), a avaliação de desempenho dos professores e as matrizes ideárias a elas subjacentes são apontadas como alterações fundamentais conducentes ao sucesso escolar e como vias importantes para modificar o panorama nacional nas estatísticas internacionais. Dessas matrizes, o trabalho docente em equipa emerge como imprescindível para transformar o *status quo* dominante.

Na literatura actual sobre a escola e a educação surge a ideia consistente da necessidade de reinventar a escola, de modo a torná-la mais reflexiva, uma perspectiva de escola mais ampla, não isolada do exterior, não distante da vida social, mas orgânica e funcionalmente interactuante com o meio, livre e solidária. Neste sentido, Fernandes (1990) sustenta que:

Tendo em conta que alguns conceitos do tema de probabilidades são conhecimentos necessários à resolução de tarefas exigíveis ao cidadão comum, parece recomendável a pertinência da sua inclusão nos curricula da escolaridade básica, como forma de proporcionar a todos alguma formação neste domínio, a

qual não deve ter por preocupação apenas aqueles que vão prosseguir os seus estudos. (p. 10)

A Análise Combinatória é leccionada pela primeira vez no 12.º ano de escolaridade (Ministério da Educação, 2002), integrada no cálculo de probabilidades, e é considerado um tema difícil, quer pelos alunos quer pelos professores (Silva, Fernandes & Soares, 2004). Dada a importância que a Combinatória assume actualmente no mundo, a nosso ver, reveste-se de particular importância descobrir até que ponto os alunos são capazes de resolver problemas de Combinatória e compreendê-los, pois “a resolução de problemas (...) tornaria os objectivos do ensino mais práticos e imediatos [e] aproximaria a escola do meio envolvente, na medida em que o seu ensino se refere, também, a questões vividas nesse meio” (Fernandes, 1990, pp. 8-9). No caso particular da Combinatória, para Roa, Batanero, Godino e Cañizares (1996) as estratégias de resolução de problemas de Combinatória constituem estratégias gerais, aplicáveis não apenas à Combinatória, o que releva o papel que a Combinatória pode desempenhar na aprendizagem de técnicas gerais de resolução de problemas.

Várias são, também, as causas apontadas para explicar o insucesso dos alunos em Matemática; entre elas, as que estão relacionadas com os professores e o seu processo de ensino, nomeadamente as referentes às metodologias utilizadas nas suas práticas pedagógicas.

A pretendida mudança das estratégias de ensino ainda não chegou à generalidade das aulas de Matemática. Mesmo que os programas sejam renovados de forma a advogarem a necessidade de mudança, é necessário que haja uma mudança real nas práticas de ensino, apostando em novos métodos (National Council of Teachers of Mathematics [NCTM], 1994).

A aprendizagem deverá envolver os alunos intelectualmente e fisicamente. Eles deverão tornar-se alunos activos, estimulados a aplicar os seus conhecimentos e experiências a situações novas e progressivamente mais complexas. As estratégias de ensino deverão incidir no envolvimento dos alunos no processo de aprendizagem e não na simples transmissão de conhecimentos. (NCTM, 1991, p.79)

A mudança não acontece por acaso; ela deve passar por uma diversidade de estratégias que criem no estudante o gosto pela aprendizagem da Matemática, que desenvolvam um sistema de concepções acerca da disciplina e da sua aprendizagem e que contrariem as ideias já preconcebidas, não se ficando pela memorização de processos mecânicos que lhes permitirão resolver actividades propostas na sala de aula.

Há grandes razões para que os professores mudem as suas práticas educativas, para irem ao encontro da realidade presente e às reais necessidades dos alunos. Uma das razões

deve-se ao facto do desenvolvimento das teorias de aprendizagem serem condicionadas pelas características da complexidade das aprendizagens actuais, que são completamente diferentes das de algumas décadas ou anos atrás.

O domínio e desenvolvimento de conhecimentos são muito importantes, embora não sejam suficientes. É mais importante ainda que se saibam integrar, relacionar e mobilizar os conhecimentos e estratégias, para que se consigam gerir afectos, emoções e atitudes e para se poder saber quando e como aplicar os saberes.

Outra das razões prende-se com o desenvolvimento das teorias do currículo, promovidas pela transformação da sociedade, tendo-se tomado mais multicultural, mais exigente a todos os níveis. Actualmente há uma tendência para adaptar os sistemas educativos à realidade, tentando garantir a preparação dos jovens para lidarem com situações complexas, aptos a resolverem problemas em contextos diversificados, a saberem utilizar as novas tecnologias de informação e comunicação, a seleccionarem informação, a serem tolerantes face às diferenças, a serem cidadãos críticos e participativos na vida em sociedade.

O trabalho de dissertação que aqui se apresenta visa estudar o contributo do trabalho colaborativo na predisposição para enfrentar mudanças e na criação de expectativas positivas dos professores em relação às possibilidades de êxito dos alunos na aprendizagem do tema de Análise Combinatória.

Segundo Boavida e Ponte (2002), “a colaboração tem-se revelado importante em campos como o desenvolvimento de projectos curriculares ou a realização de projectos de intervenção educativa centrados em problemas específicos” (p. 44). Estes projectos são, por norma, bastante menos estruturados do que os cursos, exigindo dos professores grande empenhamento durante um período de tempo razoavelmente longo. Assim, apesar de existirem vários estudos neste campo da colaboração profissional, a compreensão do desenvolvimento profissional nestes contextos é limitada (Boavida & Ponte, 2002).

Impõe-se a necessidade de uma reflexão sobre as potencialidades do trabalho colaborativo desenvolvido pelos professores, como uma estratégia de desenvolvimento profissional e como forma de assegurar a implementação de mudanças educativas introduzidas externamente, dado que a colaboração entre professores é também promovida pela reorganização curricular.

A colaboração potencia uma reflexão efectiva ao longo de todo um processo e o desenvolvimento de competências de carácter social, processual e cognitivo dos seus intervenientes. Encarada como promotora do crescimento profissional dos professores e do

desenvolvimento das escolas a partir de dentro, julgamos que a colaboração prospectiva novas formas de implementar mudança e inovação.

É necessário que os professores mudem; para isso, têm que sentir vontade e audácia para concretizarem as orientações curriculares, no que concerne à concretização de tarefas inovadoras na sua prática. Serrazina (1999) defende que,

a mudança nas práticas parece ocorrer quando os professores ganham auto-confiança e são capazes de reflectir nas suas práticas. Isto pressupõe um elevado grau de consciencialização que os ajude a reconhecer as suas falhas e fraquezas e a assumir um forte desejo de as ultrapassar. Estas coisas levam tempo e os professores têm de ser persistentes. (p. 163)

Assim, são considerados como instrumento de inovação a investigação e a investigação-acção, passando a formação de professores para a mudança por potenciar as seguintes características: ser professor investigador, reflexivo, crítico e interveniente.

Este estudo sobre o desenvolvimento do conhecimento didáctico do professor, para além da sua natureza colaborativa, procura levar os professores a investigarem as suas práticas a partir da sua problematização. Como recorda Day (2001), “os professores que reflectem na, sobre e acerca da acção empenham-se numa investigação, com vista não só a uma melhor compreensão de si próprios enquanto professores, mas também tendo em vista a melhoria do seu ensino” (pp. 47-48). Ponte (1999) acrescenta à investigação uma componente de identidade profissional, afirmando:

A investigação, ou, pelo menos, certos aspectos da actividade investigativa, tem vindo a tornar-se também uma componente da identidade profissional dos professores. Estes devem ser motivados para identificar problemas e devem ter uma noção de como os abordar no quadro de um processo investigativo. (p. 335)

Especificamente, neste estudo procurar-se-á responder às seguintes questões de investigação:

1. O trabalho colaborativo é facilitador da promoção de uma atitude reflexiva e investigativa dos professores, face às dificuldades apresentadas pelos alunos em Combinatória?
2. De que forma o trabalho colaborativo se reflecte no desenvolvimento do conhecimento didáctico dos professores em Combinatória?

1.2. Relevância do estudo

O currículo nacional aponta claramente a importância do construtivismo na aprendizagem e no ensino. O professor é visto, portanto, como um promotor de aprendizagens. É um especialista capaz de favorecer e orientar o processo de aprendizagem dos seus alunos, sem fornecer os conceitos e conteúdos que os alunos devem adquirir por eles próprios. Os professores devem estar preparados para seleccionarem as melhores soluções disponíveis para enfrentarem os problemas dos alunos e do seu próprio desenvolvimento profissional.

Segundo Silva *et al.* (2004) a dificuldade que os professores sentem na leccionação deste tema “explica o facto de o ensino se limitar, na maioria das vezes, à exposição de fórmulas e à sua aplicação na resolução de exercícios, algo que contraria as recomendações do National Council of Teachers of Mathematics (1991)” (p. 62).

O estudo da Combinatória não pode resumir-se a um conjunto de procedimentos que permitem ao aluno resolver exercícios matemáticos, utilizando algoritmos específicos. Para Russel e Friel (1989) os alunos quando trabalham com dados devem desenvolver hábitos de reflexão, levantar questões, formular conjecturas e procurar padrões. Podemos, então, salientar que o desenvolvimento do raciocínio em Combinatória implica a implementação de estratégias de ensino e de aprendizagem activas.

Mason (1996) enfatiza a importância de o professor sentir segurança no conteúdo matemático que ensina, pois só desta forma poderá compreender os seus próprios alunos e criar um ambiente adequado à implementação de actividades de investigação. Torna-se assim necessário que o professor adopte uma postura, que deve ser também ela, de carácter investigativo.

Fazendo uma análise das respostas, das explicações e justificações dos alunos, através de um questionamento adequado, o professor retira informação acerca da apropriação que cada um faz dos conceitos ensinados, avaliando desta forma os resultados do seu trabalho e o conhecimento dos alunos. Esta prática faculta ao professor o acesso às dificuldades dos alunos, permitindo-lhe identificar os factores subjacentes e a exploração no sentido da sua superação. Assim, o erro é visto como ponto de partida capaz de desencadear uma aprendizagem significativa. Segundo diversos investigadores (e.g., Batanero, Godino & Navarro-Pelayo, 1994, 1997a; Batanero, Navarro-Pelayo & Godino, 1997b), o processo de instrução é eficiente se os professores procurarem conhecer e compreender a natureza dos raciocínios errados dos alunos,

bem como retirar informação acerca das variáveis que desencadeiam esses erros, aquando da resolução de problemas combinatórios.

Relativamente aos professores, os seus valores, as suas concepções e as suas preferências vão influenciar estilos de ensino diversos e ancoram, também, de turma para turma, diferenças nas preferências de ensino dos alunos: uns preferem um ensino mais concreto e outros um ensino mais abstracto, uns preferem um ensino individual e outros um ensino de grupo, uns preferem um ensino centrado na descoberta e outros preferem um ensino mais orientado. Numa época de mudanças aceleradas, os professores devem assumir um papel participativo na sua construção e transformação, assumindo-se como agentes da sua aprendizagem e mudança (Day, 2001) e, conseqüentemente, da mudança dos contextos em que se inserem.

O nosso estudo responde, em parte, à sugestão de Ferreira (2007), a propósito da investigação que desenvolveu sobre o *Ensino da Combinatória no 12.º ano de Escolaridade: Análise das estratégias de ensino*. Na secção de recomendações sobre futuras investigações, advoga a continuação do seu trabalho, considerando “relevante averiguar em que medida o trabalho colaborativo, numa lógica de reflexão-acção, poderá modificar as práticas e, conseqüentemente, melhorar as aprendizagens dos alunos” (p. 239).

Conjecturamos que, ao longo da investigação, nomeadamente nas reuniões efectuadas, os professores participantes manifestem necessidades de alterarem as suas práticas, de acordo com as turmas que têm, procurem reconstruir as suas teorias de acção (Schön, 1987) e revelem, também, o desenvolvimento de atitudes colaborativas, reflexivas e investigativas, nomeadamente valorizando a prática do trabalho conjunto, tendo consciência do processo da construção do seu conhecimento profissional, e manifestando capacidade de diagnosticar os problemas da prática educativa de modo a implementar estratégias de acção conducentes à sua melhoria num constante processo de reflexão.

No vasto campo de estudo relativo aos professores, este trabalho centra-se no seu desenvolvimento profissional, assumindo-se que este processo é claramente diferente da formação (Ponte, 1998). Existe um grande volume de investigações nos contextos de formação de professores, tanto inicial como contínua. Assim, estudar outros contextos de formação, com uma outra lógica relativamente ao papel dos professores, representa, pois, um abrir de novas perspectivas e práticas sobre o modo de trabalho profissional docente.

A investigação-acção assume o papel de instrumento na consecução dos objectivos deste estudo. Segundo Bogdan e Biklen (1994), “a investigação-acção consiste na recolha de informações sistemáticas com o objectivo de promover mudanças sociais” (p. 292); visa, portanto, compreender as mudanças dos professores durante e após as suas acções. Além disso, constitui-se como um meio que estimula e desenvolve o pensamento crítico e a inteligência emocional (Day, 2001).

Huberman (1973) define inovação como uma operação que tem como objectivo instituir, aceitar e utilizar determinada mudança. A esta definição de inovação assiste a ideia que deve perdurar, ser amplamente utilizada, e não perder as características iniciais. Seja o objecto de inovação as metas da educação ou parte de um processo de ensino, a inovação deve ser compreendida em termos de comportamento das pessoas e das suas relações sociais.

Ao longo da história, a escola tem assistido a sucessivas reformas e inovações. A reforma converte-se em inovação quando se verificam mudanças ao nível do pensamento e da acção dos agentes educativos, principalmente dos professores. A produção de inovações apresenta-se como consequência de ruptura e modificação das rotinas, hábitos e normas em vigor.

Esta investigação pretende, fundamentalmente, ajudar a compreender os efeitos de uma experiência de trabalho colaborativo, envolvendo duas professoras de Matemática e a investigadora, no desenvolvimento profissional dos professores, através da realização de um projecto de investigação-acção.

O *conhecimento na acção*, que se evidencia na espontaneidade com que uma acção é desempenhada, coloca os professores numa perspectiva de auto-observadores e investigadores. Ao reflectirem sobre as suas acções, progridem, alcançam um melhor conhecimento de si próprios e desenvolvem-se profissionalmente, através da *reflexão sobre a reflexão na acção* (Schön, 1987, 1992).

Em resumo, a importância deste estudo decorre de: a) ser um imperativo que os professores desenvolvam o seu conhecimento profissional ao longo da carreira; b) os projectos colaborativos constituírem um bom contexto para favorecer o desenvolvimento do conhecimento profissional dos professores; c) a investigação conduzida por professores sobre as suas práticas em contextos colaborativos contribuir para a melhoria dessas práticas; d) a Combinatória constituir um tema importante da actividade matemática na sala de aula.

Uma vez caracterizado e justificado o estudo a desenvolver, faremos no capítulo seguinte a contextualização teórica da problemática do estudo, tendo em vista o aprofundamento dos conceitos envolvidos nas questões de investigação.

CAPÍTULO 2

REVISÃO DE LITERATURA

Neste capítulo fundamenta-se teoricamente a opção do tema do estudo, desenvolvendo-se em cinco secções: a importância da Análise Combinatória, as concepções dos professores em Combinatória, o conceito e o papel da reflexão, o conhecimento profissional do professor e o trabalho colaborativo. Algumas destas secções serão subdivididas em tópicos considerados relevantes para um bom entendimento do estudo.

2.1. A importância da Análise Combinatória

O ensino da Matemática, tradicionalmente, está ligado ao cálculo, à exactidão, ao determinismo, em detrimento da exploração de situações que envolvam aproximação, aleatoriedade e estimação, situações que envolvem o acaso, as quais podem limitar a visão matemática que o aluno poderá formar, impedindo, deste modo, o estabelecimento de estratégias para a resolução de variados problemas com que se possam deparar ao longo da vida. Para Fernandes (1990):

A inclusão da teoria das Probabilidades nos currícula de Matemática proporcionaria ao aluno uma outra visão da mesma, na medida em que: deixaria de ser entendida como o campo da certeza absoluta, pois, à certeza absoluta confrontar-se-ia a certeza prática; aproximaria a Matemática das Ciências, na medida em que estas, nos nossos dias, jamais são compatíveis com uma certeza absoluta e definitiva. (p. 10)

A Análise Combinatória é uma componente essencial da Matemática Discreta, “lidando, portanto, com problemas que envolvem um número finito de possibilidades” (Almeida & Martinho, 2003, p.505) e, como tal, tem um papel importante a desempenhar na Matemática escolar, mesmo nos níveis escolares mais elementares.

A Combinatória compreende toda uma estrutura rica em princípios matemáticos estruturais que estão na base de várias outras áreas de estudo, incluindo as probabilidades, o cálculo e a contagem. Este domínio também serve outras disciplinas, tais como biologia, química e física. Como tal, a Combinatória tem um papel importante a desempenhar no currículo da escolaridade elementar e deveria acompanhar a par e passo as experiências em probabilidade que as crianças levam a cabo. (English, 2005, p.137)

Bernoulli, referido em Batanero, *et al.* (1997a), descreveu a Combinatória como a arte de enumerar todas as formas possíveis, nas quais um dado número de objectos pode ser misturado e combinado de forma a não se perder nenhum resultado possível. De acordo com Hart (1991), a Combinatória é a matemática da contagem e diz respeito a problemas que envolvem um número finito de elementos (grupos discretos) com os quais efectuamos operações diferentes. Algumas destas operações somente modificam a estrutura estabelecida (i.e., a ordem dos seus elementos), enquanto outras modificam a composição estabelecida (alterando uma amostra).

Para Johnson, (1991) as técnicas de contagem são um tópico fundamental de matemática e constituem ferramentas de grande aplicação na resolução de problemas:

Pensar através de um ponto de vista combinatório requer que o aluno explore criativamente os aspectos estruturais de um problema na esperança de vir a reduzi-lo a um caso mais simples ou a um problema anteriormente resolvido. Como resultado, muitas possibilidades de solução são analisadas sistematicamente e obtém-se conhecimento útil, tanto através das tentativas correctas como das incorrectas. (p. 128)

O processo geral é o chamado raciocínio combinatório, que constitui “a arte de contar sem contar” (Townsend, 1987).

Segundo Batanero *et al.* (1997a), embora a Combinatória tenha uma aplicação importante nas Probabilidades, aquela não se reduz simplesmente a um instrumento de cálculo desta. No caso das Probabilidades, a sua importância é bem salientada por Heitele (1975) ao incluí-la na sua lista das dez ideias estocásticas que deveriam estar presentes, explícita ou implicitamente, no currículo de estocástica. Esta ligação é visível nos tópicos principais de Probabilidades do currículo de Matemática do ensino básico e secundário. Onde, um nível de domínio adequado do raciocínio combinatório está ligado à consecução de objectivos curriculares importantes.

Além da sua importância no desenvolvimento das probabilidades, a capacidade combinatória é uma componente fundamental do pensamento formal. De acordo com Piaget e Inhelder (s/d), as operações combinatórias representam algo mais importante do que um mero ramo da matemática, constituindo um sistema tão geral quanto a proporcionalidade e a correlação, que emergem simultaneamente depois da idade dos 12-13 anos (o período de operações formais).

No entanto, Batanero (2004) defende que “a capacidade de resolver problemas combinatórios nem sempre se alcança no estádio das operações formais. Se não houver um ensinamento específico, há um número significativo de alunos que nunca chega a alcançar esta

capacidade” (p. 23), o que também é defendido por outros investigadores (e.g., Fischbein, 1975; Heitele, 1975).

Para Correia (2008), o ensino da Combinatória representa um papel muito importante no desenvolvimento do raciocínio recursivo, do raciocínio analógico e do pensamento sistemático.

Também segundo Fischbein, no prefácio do livro de Batanero *et al.* (1994):

A Análise Combinatória, com os seus conceitos e métodos, não representa somente um domínio definido na matemática. Expressa, (...) um esquema operacional (na teoria de Piaget) e um pré requisito estrutural importante para a dinâmica e poder criativo do raciocínio lógico em geral! (p. 11)

Dubois (1984) apresenta inúmeras situações em que a Combinatória releva o seu interesse, referindo:

A Combinatória possui o seu campo de estudo próprio, o das configurações finitas, e ela fornece métodos específicos para os enumerar, conhecer as suas propriedades e estudar as transformações. (...) por outro lado, ela oferece um terreno propício ao exercício da matematização e tem pleno sentido na didáctica das matemáticas. Ela é uma fonte de situações simples e concretas onde se podem exercer, de forma imediata, a intuição, a abstracção, a generalização e a formalização. Em particular, estas tornam possíveis a compreensão dos conceitos fundamentais de aplicação, do produto cartesiano, da relação de ordem, da relação de equivalência, do conjunto quociente e muitos outros. A sua exploração tornará significativas, para o aluno, estas noções abstractas e naturais, pois são essenciais a uma verdadeira formação matemática escolar contemporânea. (p. 38)

Este autor refere que o ensino da Análise Combinatória é frequentemente instrumental e normativo, consistindo na transmissão de algumas fórmulas de enumeração, superficialmente relacionadas ou sem qualquer evidência da relação entre elas. Dubois advoga ainda que o ensino da Combinatória deveria ser mais relacional, organizando, para tal, um sistema estruturado de classificação das configurações combinatórias simples de modo a favorecer uma melhor compreensão das enumerações elementares.

Algumas das razões que Kapur (1970) aludiu e que justificam a integração da Análise Combinatória na Matemática escolar são as seguintes:

- A pouca dependência da Combinatória do cálculo facilita a exploração de problemas apropriados em diferentes níveis de ensino, podendo ser introduzidos num estágio inicial do currículo escolar. Podem ser apresentados e discutidos com os alunos um enorme número de problemas desafiadores e contribuir para integrar na escola uma matemática actualizada;
- A Combinatória pode ser usada para treinar os alunos na enumeração, na formulação de conjecturas, na generalização e no pensamento sistemático, podendo também ajudar no

desenvolvimento de muitos conceitos, tais como relações de equivalência e ordem, função, amostra, etc.;

– Podem ser indicadas aplicações na física, química, biologia, análise de redes, design de experiências, teoria da comunicação, simetria, probabilidade, programação dinâmica, teoria dos números, etc.

Actualmente salientam-se as aplicações orientadas para o computador, o que acontece também no caso da Combinatória. Considerando a grande apetência dos jovens pelos computadores, certamente estas aplicações possuem um grande potencial motivador.

Seguir uma abordagem interdisciplinar requer uma verificação constante da prática docente pois não bastará ao professor o domínio do conteúdo da sua disciplina, sendo necessário investigar assuntos de outras áreas e integrar conceitos, procedimentos e metodologias. Na prossecução desta meta, o trabalho colaborativo entre professores assume-se como uma estratégia da maior relevância.

2.1.1. Ensino e aprendizagem da Combinatória

Tal como em outros temas matemáticos, o ensino tradicional da Matemática, centrado na transmissão de saberes, não é adequado à exploração de situações que envolvam a Combinatória. Esta metodologia de ensino limita a visão matemática que o aluno poderá desenvolver, confinando as suas possibilidades de estabelecer estratégias de resolução de problemas diversificadas, desenvolver a sua autonomia e flexibilidade e compreender e discernir o que é pertinente na variedade de informação a que tem acesso diariamente. Também Ponte (2002) considera que “o ensino é mais do que uma actividade rotineira onde se aplicam simplesmente metodologias pré-determinadas. Trata-se, simultaneamente, de uma actividade intelectual, política e de gestão de pessoas e recursos” (p. 5).

Em 1981, a Mathematical Association of America publicou as *Recomendações para um Programa Geral de Ciências Matemáticas*. Este relatório, no que concerne ao curso de Matemática Discreta, enfatiza que o processo de cálculo combinatório deveria ser incluído como uma actividade importante na sala de aula:

Se se utilizar um ponto de vista correcto, muitos problemas combinatórios podem ter soluções bastante simples. Contudo, o objectivo (...) é não só mostrar respostas simples aos alunos mas também ensinar-lhes como descobrir essas respostas simples (assim como as não tão simples). Os meios para alcançar as soluções devem merecer-nos mais preocupação do que os fins. Aprender a resolver

problemas (...) requer uma ampla discussão sobre a falta de lógica nas análises erradas, assim como na apresentação de análises correctas. (pp. 26-27)

Nas *Normas para o currículo e a avaliação em matemática escolar* (NCTM, 1991) sugere-se que o cálculo combinatório é um instrumento matemático útil numa colecção de esquemas representativos do aluno. Contudo, o processo combinatório deve envolver mais do que a “aplicação de fórmulas analíticas para permutações e combinações” (NCTM, 1991, p. 179).

Para que os alunos possam alcançar os resultados desejados ao utilizarem estas ferramentas, os professores de Matemática devem empenhar-se em criar uma atmosfera positiva, que apoie o cálculo combinatório. Deve ser disponibilizado tempo para a resolução pessoal de problemas e para a discussão em grupo. Os professores devem, também, estruturar as actividades de sala de aula de maneira a fornecerem uma base conceptual para as permutações básicas e fórmulas de combinação e algoritmos combinatórios.

As orientações metodológicas dos actuais currículos de Matemática e as investigações mais recentes enfatizam a importância da actividade dos alunos, reforçando a ideia de que os alunos devem desempenhar um papel activo nos seus próprios processos de aprendizagem. Thompson (1992) sustenta que *conhecer* a matemática é *fazer* matemática. O que caracteriza a Matemática são as suas actividades criativas ou processos generativos que lhe são intrínsecos. Esta visão é consistente com a concepção de ensino da Matemática,

na qual os alunos se ocupam com actividades que se desenvolvem a partir de situações-problema, necessitando de raciocínio e de um pensamento criativo, juntando e aplicando informação, descobrindo, inventando e comunicando ideias, e testando essas ideias através da reflexão crítica e argumentação. Esta visão do ensino da matemática está em nítido contraste com visões alternativas, nas quais a mestria de conceitos e procedimentos é o objectivo final da instrução. Todavia, não se nega o valor dos conceitos e procedimentos no currículo da matemática. (Thompson, p. 127)

Para que a realização de actividades que concretizem uma aprendizagem por descoberta na aula de Matemática constitua realmente um momento de aprendizagem significativa para os alunos, torna-se necessário que o professor aposte na preparação dessas aulas, pois a variedade de processos em que os alunos se podem envolver, bem como o seu grau de complexidade e de imprevisibilidade, requerem do professor uma preparação cuidada. Quando o professor prepara as tarefas a implementar na sua prática pedagógica, convém que tenha em conta aquelas “que despertam a curiosidade dos alunos e que os convidam a especular e a prosseguir com as suas intuições” (NCTM, 1994, p. 27), instigando os seus alunos na investigação e na descoberta de

novas ideias matemáticas. Ora, para tal, exige-se um conhecimento do conteúdo atento aos processos envolvidos, integrando conceitos e áreas muito diversas, o que implica mobilizar importantes aspectos do conhecimento profissional do professor. Requer, também, um conhecimento didáctico capaz de organizar, desencadear e gerir a dinâmica de uma aula, de modo a proporcionar aprendizagens significativas aos alunos, incluindo capacidades de ordem superior, entre as quais comunicar ideias matemáticas, estabelecer conexões matemáticas e formular e resolver problemas (English, 2005).

Matos e Serrazina (1996) advertem, contudo, que “se o professor dá oportunidade aos alunos de forma [a] que eles explicitem os seus significados e expressem as suas ideias, não será com certeza capaz de planificar e prever em detalhe a sua aula” (p.37).

De acordo com tendências actuais do ensino da matemática, esta disciplina não é só uma linguagem simbólica e um sistema conceptual mas é também, e principalmente, uma actividade humana que envolve a resolução de problemas partilhados socialmente. Na visão do programa oficial português (Ministério da Educação, 2002), a resolução de problemas, a comunicação e as conexões devem ser actividades centrais do ensino e da avaliação em matemática. Como nos diz Romberg (1993), uma avaliação autêntica deve ser desenvolvida através da determinação de quão longe o aluno foi na sua capacidade para resolver problemas não rotineiros, para raciocinar, para comunicar e para aplicar ideias matemáticas numa variedade de problemas relacionados. No que diz respeito à habilidade combinatória, uma instrução bem conduzida deve avaliar as estratégias desenvolvidas pelos alunos perante um problema proposto, valorizando as suas estratégias espontâneas e conhecimentos prévios, bem como o tipo de dificuldades que apresentam, com o intuito de identificar as variáveis que influenciam essas dificuldades.

O professor, na sua prática lectiva, deve enfatizar o envolvimento dos alunos na realização de tarefas, em pequenos grupos, sobre problemáticas que despertem os interesses dos alunos e favoreçam o desenvolvimento de competências necessárias ao exercício de uma cidadania esclarecida, crítica e interveniente. Consoante o tipo de tarefa e os objectivos que se propõem atingir, o professor decidirá se os alunos deverão explorar a tarefa individualmente, em pequenos grupos ou mesmo no grupo-turma.

A capacidade de verbalização promove interacções entre os alunos através da troca de ideias, permite negociações de significados com vista à aquisição de um entendimento comum aos diversos elementos do grupo, e ao mesmo tempo desenvolve a capacidade de argumentação de cada um, uma vez que, através da troca de ideias e partilha de conhecimentos

e experiências, os alunos conseguem formular juízos de valor que lhes permitem estabelecer conjecturas sobre determinada situação problemática que surja na sala de aula. O processo de ensino-aprendizagem deve contemplar interacções entre alunos e entre professor e alunos.

A resolução de problemas no ensino e na aprendizagem da Combinatória

Na resolução de problemas, o objectivo é encontrar um caminho, envolvendo a interpretação e o estabelecimento de estratégias, para chegar a uma solução não imediatamente acessível, pois admite um grau de dificuldade e de desafio considerável. Um problema é uma tarefa fechada (Ponte, 2005).

Uma tarefa aberta, “comporta um grau de indeterminação significativo no que é dado, no que é pedido, ou em ambas as coisas” (Ponte, 2005, p. 17), e o objectivo é explorar todas as estratégias relevantes para a sua resolução. Os alunos utilizam diferentes raciocínios para chegarem a diferentes respostas correctas, colocam questões baseadas, são criativos e usam as suas próprias ideias para resolver as situações problemáticas com que se deparam. Este tipo de tarefas permite aos alunos desenvolverem capacidades relacionadas com a actividade matemática, como conjecturar e argumentar de forma crítica, explorar conexões matemáticas existentes entre várias ideias matemáticas, encontrar processos de resolução diversificados, efectuar demonstrações e avaliar o trabalho realizado (Ponte, Ferreira, Varandas, Brunheira & Oliveira, 1998). Os alunos tomam decisões acerca da interpretação de informação e do uso apropriado da Matemática, pensam acerca do contexto e tomam decisões que tenham sentido para eles. A investigação desencadeada na sala de aula envolve a exploração como uma necessidade para a produção de conjecturas, proporciona aos alunos oportunidades de fazer Matemática do mesmo modo que os cientistas o fazem, pois será o aluno quem autonomamente terá de escolher qual o caminho a seguir.

Tanto o ensino como a avaliação da Combinatória devem ser baseados na resolução de diferentes problemas combinatórios, nos quais os alunos necessitam de usar procedimentos de enumeração sistemáticos, de recorrência e de classificação, tabelas e diagramas de árvore. Batanero *et al.* (1994) fazem uma proposta de ensino considerando os procedimentos combinatórios: lógicos, gráficos, numéricos, tabulares e algébricos (quadro 1); e os modelos combinatórios (quadro 2).

Quadro 1 – Procedimentos combinatórios segundo Batanero *et al.* (1994, 1997a)

Lógicos	Classificação, enumeração sistemática, princípio de inclusão/exclusão e a recorrência
Gráficos	Diagrama de árvore e gráficos
Numéricos	Princípio da adição, da multiplicação e da divisão, números combinatórios e fraccionários, o triângulo de Pascal
Tabulares	Construção de tabelas e quadros
Algébricos	Geração de funções

A partir da investigação inicial de Dubois (1984), Batanero *et al.* (1994, 1997a, 1997b) enfatizaram que na prática lectiva se podem traduzir os vários problemas combinatórios num dos três modelos combinatórios implícitos – selecção, distribuição e partição – e deste modo, o professor promoverá nos alunos o desenvolvimento de capacidades de ordem superior.

Quadro 2 – Modelos combinatórios implícitos segundo Batanero *et al.* (1994, 1997a, 1997b)

Seleccção	Consiste na selecção de uma amostra a partir de um conjunto de objectos, amostras ordenadas e não ordenadas – arranjos e combinações.
Distribuição	Está relacionado com a distribuição de objectos em recipientes, normalmente em caixas ou urnas. Neste modelo está implícito o conceito de aplicação, pois atribuir p objectos a n recipientes corresponde a estabelecer uma correspondência do conjunto dos p objectos para o conjunto dos n recipientes.
Partição	Consiste em estabelecer a partição de um conjunto em subconjuntos. Em geral, trata-se de uma tarefa difícil e não é usual aparecer nos manuais escolares (Batanero <i>et al.</i> , 1994, 1997a).

Os modelos combinatórios implícitos foram inicialmente propostos por Dubois (1984), que pretendeu favorecer uma melhor compreensão das enumerações elementares organizando, num sistema bem estruturado, as configurações combinatórias correspondentes. Apresentou, então, as classificações das configurações combinatórias simples, que correspondiam a vários casos de distribuição e ordenamento de objectos em caixas, segundo quatro modelos: o das distribuições, o das selecções (que enfatizam o conceito de amostragem, compreendendo os arranjos e as combinações), o das divisões de um conjunto em subconjuntos e o das decomposições de números naturais em várias somas. Descreveu e explicitou também, de forma peculiar, as relações estruturais entre os diferentes modelos de classificação propostos, com o objectivo de “favorecer a integração dos vários conceitos de combinatória elementar enumerativa no ensino deste assunto, aumentando os relacionamentos entre os vários conceitos e as suas configurações globais” (Dubois, 1984, p. 37).

Este autor, ao propor-se estabelecer a sistematização das configurações combinatórias, reagrupou-as em torno das distribuições simples e descreveu uma distribuição ordenada como

uma distribuição onde se tem em conta a ordem dos objectos nos recipientes (células, caixas ou urnas). É de referir que não se pode ordenar nos recipientes objectos idênticos; no entanto, há muitas possibilidades diferentes neste modelo. Dubois (1984) diferenciou seis classes disjuntas no seu modelo básico, a saber:

1. A das distribuições ordenadas de m objectos diferentes em n recipientes diferentes;
2. A das distribuições não ordenadas de m objectos diferentes em n recipientes diferentes;
3. A das distribuições de m objectos semelhantes em n recipientes diferentes;
4. A das distribuições ordenadas de m objectos diferentes em n recipientes idênticos;
5. A das distribuições não ordenadas de m objectos distintos em n recipientes idênticos; e
6. A das distribuições de m objectos idênticos em n recipientes idênticos. (p. 40)

A juntar a isto, outras condições mostram-se básicas, tais como o número máximo de objectos em cada recipiente ou a possibilidade de ter recipientes vazios para encontrar a solução para o problema. Não há uma operação combinatória diferente para cada tipo de distribuição mencionada, e, além disso, a mesma operação combinatória pode ser obtida com dois problemas de distribuição diferentes. Por exemplo, podíamos definir os arranjos como o número de distribuições possíveis de n objectos diferentes em m células com, no máximo, um objecto em cada célula (se a distribuição é ordenada ou não, é irrelevante). Quando consideramos os objectos não distinguíveis, então temos as combinações. Contudo, poderemos também considerar algumas distribuições que não podem ser expressas por uma operação combinatória básica (Batanero *et al.*, 1997b).

Batanero *et al.* (1997a) apresentaram, também, uma proposta para classificar problemas combinatórios (quadro 3). Este sistema de classificação é um guia útil na exploração sistemática da estrutura de um problema, pois, se os alunos forem capazes de estruturar um problema de acordo com o seu tipo geral, já deram um passo importante na sua resolução.

Quadro 3 – Tipos de problemas combinatórios segundo Batanero *et al.* (1997a)

Problemas de existência	Lidam com a verificação de existir ou não solução para um dado problema
Problemas de contagem	Investigam quantas soluções podem existir, para problemas com soluções conhecidas
Problemas de optimização	Concentram-se em encontrar a melhor solução para um problema particular.
Problemas de enumeração	Exigem procedimentos para enumerar de forma sistemática todas as soluções para um determinado problema.

DeGuire (1991) apresentou uma proposta de intervenção para o ensino da Combinatória, onde se propôs abordar, de forma agradável, compreensível e significativa, a resolução de problemas sobre “permutações” e “combinações”, tanto orientada para alunos do ensino básico como do secundário. Dependendo do nível escolar dos alunos, o tempo necessário para apresentar os mesmos conteúdos na sala de aula foi variável, com os alunos mais novos a dispenderem mais tempo.

DeGuire iniciou a sua intervenção fazendo uma abordagem de ensino ao “princípio fundamental de contagem”, advogando que, se o professor fornecer a definição isolada de qualquer contexto, os alunos não vêem essa declaração formal como significativa ou útil. Contudo, se este conteúdo for apresentado através da resolução de problemas que envolvam situações concretas, úteis e significativas, muitos alunos o compreenderão. Então, os alunos podem resolver problemas usando a estratégia de *enumerar* todos os casos possíveis, advertindo, porém, que alguns alunos podem achar mais significativa a representação gráfica, nomeadamente recorrendo ao *diagrama de árvore*. Na sua perspectiva, é muito importante que o aluno resolva uma variedade destes problemas, fazendo a enumeração de todas as configurações ou usando diagramas de árvore, contando, por fim, o número de combinações obtidas. Do contacto com vários exemplos deste tipo de problemas, advoga-se que é importante que os alunos abstraíam os princípios comuns a todas estas situações e encontrem um procedimento mais eficiente do que o enumerar todas as possibilidades ou fazerem diagramas de árvore. Muitos alunos conseguiram descobrir a natureza multiplicativa do processo, donde, quando os alunos estiverem seguros de que os resultados são verdadeiros e não precisarem de os continuar a verificar com a enumeração, então será oportuno que os professores lhes apresentem problemas mais complexos. Na sua opinião, a compreensão do “princípio fundamental de contagem” é indispensável para o resto das actividades apresentadas na Combinatória.

A introdução ao estudo das permutações, segunda a autora, pode ser feita com um problema e de seguida é aconselhável resolver uma série de exercícios para praticar o procedimento recentemente aprendido. Os exercícios podem variar em situação e dificuldade apropriada ao nível dos alunos. A dificuldade pode ser variada, em, pelo menos, duas formas: aumentando os números envolvidos (o número de possibilidades aumenta rapidamente) ou incluindo considerações especiais.

A autora realça que, embora a ordem dos elementos seja, às vezes, uma consideração, é irrelevante em muitos problemas. Por exemplo, na lotaria do estado de Michigan, o comprador de bilhete escolhe 6 números do total de 1 a 45, com a expectativa que correspondam aos seis números sorteados no sábado seguinte. No sábado, 45 bolas numeradas entrarão numa câmara, andando às voltas até que primeiro uma bola, depois outra etc., caiam numa calha. Essa calha fecha-se depois das seis bolas terem sido extraídas. Uma vez que somente os seis números são importantes, e não a sua ordem de extracção, este é um exemplo de combinação de 45 elementos extraídos 6 a 6.

English (2005) interpretou o “princípio fundamental de contagem” da seguinte forma: “O princípio determina que, se uma tarefa pode ser feita em n formas e outra em m formas, então o número de formas em que as duas tarefas podem ser feitas é nm , com o princípio a estender-se a qualquer número de tarefas” (p. 122). Esta autora propõe que este princípio básico da Análise combinatória pode ser visto, também, em termos da cardinalidade do produto cartesiano de dois ou mais conjuntos. O produto cartesiano de dois ou mais conjuntos é também especialmente útil na construção de espaços amostrais. Quer dizer, se A e B representam espaços amostrais para duas experiências aleatórias diferentes, realizadas sucessivamente, então o espaço amostral da experiência composta é o produto cartesiano $A \times B$ (Borovcnik, Bentz & Kapadia, 1991).

O processo de agrupar certos objectos de conjuntos discretos de uma forma sistemática para formar todas as combinações possíveis tem, também, sido referido como uma “estratégia de conta-quilómetros”, assim chamada dada a sua semelhança com um conta-quilómetros de automóvel (English, 1988, 1991). Para ilustrar esta estratégia, considere-se uma selecção de pares de elementos, um de cada um dos conjuntos discretos. Quando se formam pares ordenados a partir de dois conjuntos dados com um elemento de cada conjunto, é mantido constante um elemento de um conjunto, enquanto os elementos do outro conjunto são percorridos sistematicamente até que todas as combinações possíveis com o elemento constante tenham sido formadas. É então seleccionado um novo elemento constante do primeiro conjunto. A exaustão de todos os elementos constantes no primeiro conjunto indica a geração de todas as combinações possíveis.

Ainda segundo esta autora, para descrever experiências simples podemos enumerar todos os resultados possíveis. Contudo, determinar o espaço amostral relativo a acontecimentos compostos requer procedimentos de enumeração mais complexos do que o espaço amostral envolvendo acontecimentos simples (e.g., lançar um só dado). Os acontecimentos compostos

requerem um raciocínio combinatório mais sofisticado. Como Batanero *et al.* (1997a) referem, muitas concepções erradas em probabilidades são devidas a uma falha do raciocínio combinatório, resultado da enumeração incorrecta do espaço de resultados.

Para Glaymann e Varga (1975) as etapas a seguir para resolver um problema combinatório são: evidenciar as propriedades dos elementos de um conjunto finito e de seguida proceder à classificação e *enumeração* desses elementos no sentido de chegar à solução do problema. À semelhança de outros investigadores (e.g., Fischbein, 1975; Heitele, 1975), estes autores enfatizam a importância do *diagrama de árvore* como estratégia básica. Através da multiplicação do número de ramificações dos diferentes níveis do diagrama concretizamos o princípio da multiplicação ou princípio fundamental de contagem. Relativamente às combinações, as ramificações da árvore não evoluem de forma regular, devendo esta operação combinatória ser interpretada como sendo o número de arranjos simples a dividir pelo número de permutações.

Johnson (1991) sugere que o dominó e os jogos de dominó são um recurso excelente para resolver problemas que encorajam o cálculo combinatório. Um exemplo óbvio é aquele que usa o dominó para ilustrar o princípio da indução matemática. Contudo, o mundo dos jogos de dominó é muito mais rico e tem sido pouco explorado matematicamente. O dominó pode ser usado quase por qualquer grupo etário.

Estratégias de resolução de problemas de Combinatória

Devem ser dadas oportunidades aos alunos para explorar situações que envolvam problemas combinatórios sem instrução directa, pois os problemas combinatórios permitem uma variedade de representações e abordagens, tornando possível a sua exploração mesmo com um mínimo de conhecimento do tema (English, 2005).

Batanero *et al.* (1994) e Godino, Batanero e Cañizares (1997) consideram que o ensino de novos conceitos deve ser precedido de uma pormenorizada investigação acerca do conhecimento que os alunos possuem a respeito dos mesmos, pois o significado matemático é alcançado através de conexões entre a nova ideia e os conhecimentos prévios dos alunos. Para estes autores, perante um problema de Combinatória, os alunos devem ter tempo suficiente para investigarem as possíveis soluções e ser desafiados a “inventarem as suas próprias representações” (p. 118), incluindo o uso de desenhos, tabelas, listagens sistemáticas e não sistemáticas e modelos concretos (English, 2005). Em oposição à simples aplicação das fórmulas de cálculo, Batanero *et al.* (1997a) recomendam que sejam proporcionadas aos alunos

tarefas que envolvam actividades de enumeração, construção de diagramas de árvore e o uso de materiais manipuláveis. Watson (1996) preconiza a resolução de um problema por decomposição em subproblemas, como recursos didácticos essenciais para o adequado desenvolvimento do raciocínio combinatório e, conseqüentemente, do pensamento formal.

Para resolverem problemas de contagem, os estudantes devem começar por enumerar alguns casos para descobrir a estrutura do problema, com ou sem a ajuda de um diagrama de árvore. Em vez disso, também podem utilizar a multiplicação para contar colecções agrupadas, aplicar as regras da adição e da multiplicação.

Para Batanero *et al.* (1994),

Através das actividades de enumeração sistemática e de contagem praticam-se as capacidades numéricas básicas, as relações entre os números naturais, assim como as operações de adição e multiplicação. Desta forma, exercita-se a classificação de objectos no que diz respeito a certas propriedades e habitua-se o aluno na busca de procedimentos sistemáticos e no pensamento indutivo e algorítmico. (p. 118)

Com um número mais pequeno de elementos, os alunos podem seguir uma das estratégias: a enumeração ou o diagrama de árvore.

Os diagramas de árvore são um dos recursos mais úteis para visualizar tanto as situações de Combinatória como as de Probabilidades, e apresentam características intuitivas importantes. Oferecem uma representação global da estrutura de situação, o que contribui para a imediatividade da compreensão e para se achar uma solução do problema. Segundo Heitele (1975)

O diagrama de árvore é uma representação icónica de importância fundamental, porque visualiza-se a estrutura multi-passos da experiência, assim como os resultados possíveis e trabalha em conjunto com outras operações combinatórias. Por esta razão, as operações combinatórias básicas, mais do que serem simplesmente algoritmos padrão para calcular os campos de probabilidade de experiências complexas, fornecem uma visão directa, em particular na sua forma icónica e inactiva, da estrutura interior das experiências de acaso e do encadeamento de experiências sucessivas dentro de um complexo maior. (p. 198)

Assim, através da utilização do diagrama de árvore, por aproximações sucessivas, os alunos acabam por descobrir uma regra de cálculo e atingir o significado intuitivo dessa regra. Ao aprenderem a fazer uso de um diagrama em árvore, os alunos estão, de facto, a assimilar uma *lei de construção*. Os recursos indutivos do modelo são evidentes e os sucessivos passos

de raciocínio dentro do modelo têm lugar indutivamente e quase de forma instantânea (Fischbein, 1975).

Pode-se objectar que o aspecto demonstrativo está ausente, pois os alunos que chegam ao princípio da construção por aproximações progressivas acabam por descobrir uma regra de cálculo, mas não estão a usar estritamente uma demonstração recursiva. O ponto de vista de Fischbein, é de que, mesmo que o controle dedutivo não seja explícito, ele ocorre no processo construtivo, e é perfeitamente evidente na modalidade simbólica.

A exploração das tarefas propostas requer que, em cada momento, através de uma generalização limitada, se dê o salto em direcção ao passo seguinte no processo de um pensamento construtivo, encorajando a participação dos alunos. O professor deve estar atento às questões que formula, privilegiando os raciocínios e a argumentação dos alunos (NCTM, 1991).

É importante fornecer aos alunos oportunidades para se envolverem no processo matemático de representação, raciocínio, abstracção e generalização e para estabelecerem conexões entre as ideias matemáticas. Os problemas combinatórios podem ajudar os alunos a construir representações significativas, a raciocinarem matematicamente e a generalizarem conceitos matemáticos (Sriraman & English, 2004). Consequentemente, tanto o ensino como a avaliação da Combinatória devem ser baseados na resolução de diferentes problemas combinatórios, nos quais os alunos necessitam de procedimentos de enumeração sistemáticos, de recorrência, de classificação, de tabelas e diagramas árvore. A assimilação de modelos generativos como o diagrama de árvore, pelos alunos, acelera a aquisição das operações combinatórias e consequentemente o desenvolvimento intelectual (Fischbein, 1975).

2.1.2. O papel da intuição

Batanero, *et al.* (1994) afirmam que “atrasar o ensino da Combinatória, ou, por outras palavras, não cultivar o raciocínio combinatório quando os alunos reúnem as condições adequadas para o exercitarem, pode significar uma limitação séria ao desenvolvimento do seu pensamento formal” (p.80). O ensino da Estocástica deveria ocorrer desde o início da escolaridade, pois modelos explicativos inadequados, adquiridos cedo, podem transformar-se em intuições erróneas fortemente enraizadas – que são difíceis de erradicar e que podem impedir a aquisição de conhecimento correcto (Fischbein, 1975; Heitele, 1975). Fernandes (1990), corroborando esta opinião, afirma: “estas concepções erradas conduzem a resultados errados,

elas assumem-se como uma barreira à aprendizagem, pelo que será vantajoso identificar, compreender e vencer tais concepções, se pretendermos facilitar a aprendizagem” (p. 2).

Para Fischbein (1975), as intuições são componentes da inteligência sobre as quais se pode e deve construir e relacionar o conhecimento, intervindo nas acções de forma imediata. No entanto, a imediatez de uma intuição “não implica improvisação, pois é o resultado da maturação de muitas experiencias anteriores” (Godino, *et al.*, 1997, p. 37).

A contribuição de Bruner, segundo Heitele (1975), foi imprescindível para o ensino da estocástica, que actualmente faz parte dos currículos da Matemática escolar. O mesmo autor considera necessário ligar o ensino da estocástica às experiências intuitivas dos alunos. Por outro lado, na realidade complexa em que vivemos, “a necessidade de tomar decisões obrigam-nos a fazer estimativas intuitivas de possibilidades (na maioria das vezes do tipo subjectivo)” (Godino, *et al.*, 1997, p.37).

Assim, Heitele (1975) sustenta,

aperceber-me-ei daquelas ideias que fornecem ao indivíduo, em cada nível do seu desenvolvimento, os modelos explicativos, que são tão eficientes quanto possível, e que diferem nos vários níveis cognitivos, não de uma forma estrutural, mas somente através da sua forma linguística e dos seus níveis de elaboração. (p. 188)

Ainda segundo Bruner, referido pelo mesmo autor, a transição para um nível cognitivo mais elevado é preparada pelos estádios cognitivos anteriores. Exemplificando, os modelos explicativos intuitivos têm duas funções:

- (a) Como modelos em estádios iniciais, têm um valor explicativo autónomo e ajudam a criança a compreender o ambiente pelos seus próprios meios, muito antes de poder compreender a sua complexidade linguística e sofisticação dos modelos matemáticos subjacentes na sua forma analítica.
- (b) Estão a pré-estabelecer o conhecimento analítico vindouro, de uma forma que o professor, num nível mais elevado, pode pressupor um domínio intuitivo favorável, quando lidar com operações combinatórias. (p. 190)

O esquema realiza uma função essencial no pensamento produtivo, conciliando o abstracto com o concreto. O esquema, que é uma simplificação e uma “destilação” do concreto, prepara o terreno para o conceptualismo, fornecendo relações abstractas à representação espacial, dando-lhe significado dinâmico e, conseqüentemente, um potencial construtivo e criativo (Fischbein, 1975). Tais esquemas podem-se tornar uma fonte de erros, sendo desejável, por isso, que o processo seja sistematicamente guiado pelo professor, nomeadamente através de um questionamento apropriado, quando os alunos se encontram a trabalhar nos problemas.

Por exemplo, pedir aos alunos que expliquem e justifiquem as suas soluções pode levá-los a rejeitarem algumas das suas ideias originais, ou modificar, refinar, ou consolidar os seus argumentos originais (Maher & Martino, 1996).

É importante que os alunos tenham liberdade de usar representações e abordagens diferentes, e que sejam encorajados a descrever e a explicar as suas acções. Ao fazê-lo, os alunos conseguem identificar as semelhanças e as diferenças entre as suas próprias formas de representação e as dos outros. Batanero *et al.* (1994) enfatizam que “a apresentação das soluções encontradas pelos alunos, conjuntamente com a sua discussão colectiva, permitirá criar uma atmosfera de aprendizagem eficaz” (p. 118).

Um dos maiores objectivos da instrução matemática é que as crianças vejam as conexões e relações entre as ideias matemáticas (NCTM, 1991) e apliquem esta compreensão às soluções a aplicar a novos problemas — raciocínio analógico (English, 1998, 2005). Se partimos do princípio que as crianças devem estabelecer ligações apropriadas com as novas aprendizagens, então precisam de construir uma compreensão que abranja as relações estruturais entre as ideias. Quando se apresentam novos problemas combinatórios, os alunos, naturalmente, exibirão um número de soluções resultantes de abordagem diferentes, pois poderão tentar resolver o novo por analogia com o anterior, como evidenciou uma investigação feita por English (1998, 2005).

Com o *diagrama de árvore* pretende-se que os alunos construam sequências e de seguida identifiquem regularidades a aplicar, por transferência e generalização, a outras sequências (Fischbein, Pampu & Mînzat, 1970). Este modelo generativo possibilita a transferência da técnica de resolução de um problema prévio para outro semelhante – generalização iterativa – e também permite a construção de novos modelos para resolver problemas de diferente natureza, mas relacionados – generalização construtiva do raciocínio recursivo (Fischbein, 1975).

Uma descoberta comum em muitos dos estudos de combinatória é que os alunos têm dificuldade em identificar estruturas comuns de problemas que se relacionam. Como consequência, a habilidade dos alunos em transferirem a sua aprendizagem para novas situações combinatórias é limitada.

English (2005) aponta os benefícios de incorporar experiências em que os alunos constroem os próprios problemas dentro do currículo da matemática. A habilidade de construir problemas, para além da sua resolução, está-se a tornar extremamente importante na sociedade de hoje em dia. Os problemas gerados pelos alunos têm mais possibilidades de ligar a

matemática com os seus interesses, pois, segundo Fernandes (1990), evocando Moreno e Moreno (1988), “O próprio ensino (...) constitui-se como uma outra fonte de dificuldade na medida em que muitos professores desconhecem as ideias prévias dos alunos e eles mesmos, por vezes, veiculam ideias semelhantes às dos alunos” (p. 3).

Assim, os alunos sentir-se-ão mais motivados para “inventar” e resolver problemas nos quais eles tenham um interesse inerente. Ao mesmo tempo, estas experiências podem diminuir a ansiedade matemática dos alunos e levar a uma predisposição mais positiva para a disciplina, como é referido nos estudos de English (2005).

Incluir o “inventar” problemas nas experiências dos alunos, quando trabalham com a Combinatória, dá-lhes acesso aos conceitos e procedimentos combinatórios, e potencia a sua compreensão das estruturas do problema combinatório.

Relativamente à enumeração, esta sistematização favorece a exploração de diversos caminhos possíveis para chegar às fórmulas. As sistematizações intuitivas das configurações combinatórias, que se estabelecem ao nível concreto, encontram-se ao nível abstracto, permitindo o ajustamento de corroborar e de precisar os aspectos relacionais. A sua exploração tornará significativas, para o aluno, as noções abstractas de aplicação, de produto cartesiano, de relação de ordem, de relação de equivalência, de conjunto quociente e muitos outros, que são conceitos essenciais a uma verdadeira formação matemática escolar contemporânea (Dubois, 1984).

Do ponto de vista de Fischbein (1975), quando as crianças compreenderam como funciona o diagrama de árvore na construção de permutações, elas têm de necessariamente já ter compreendido como o passo de $k - 1$ objectos para k objectos é feito por multiplicação por k . A demonstração recursiva não pode, de facto, fazer mais do que isto, uma vez que mesmo a demonstração recursiva não elimina, mas incorpora, a intuição de génese indutiva.

Nenhuma construção dedutiva pode existir completamente sem um apelo à intuição, uma vez que a intuição está envolvida na selecção de axiomas e nas direcções do raciocínio.

O cálculo combinatório não está restrito a combinações e problemas de arranjos, mas inclui uma variada gama de conceitos e de competências utilizadas na resolução de problemas. Johnson (1991) advoga que as técnicas de contagem têm aplicações directas como instrumentos para a resolução de problemas. Os alunos ficam com uma apreciação do domínio dos utensílios matemáticos que sustentam o raciocínio combinatório, tais como as permutações,

combinações, teoria dos grafos, algoritmos e técnicas gerais de resolução de problemas. Em suma, os alunos são apresentados de forma autónoma ao raciocínio combinatório.

A maior parte destas componentes é um instrumento fundamental no desenvolvimento de cálculo probabilístico e na consecução de objectivos probabilísticos curriculares para o ensino básico e secundário. Com a ajuda de materiais manipuláveis e de diagramas de árvore podem ser propostas actividades ligadas às Probabilidades, mesmo para crianças muito jovens (Batanero *et al.*, 1994, 1997a).

Estas actividades podem, também, servir para desenvolver e avaliar a resolução de problemas, capacidades de comunicação e ligação a outros tópicos matemáticos.

Na opinião de Heitele (1975), a Combinatória deveria ser um tema transversal no currículo da matemática, afirmando que,

é necessário integrar a actividade estocástica tão cedo quanto possível nas actividades da aritmética, e ainda mais, na geometria, e em todos os casos respeitar e desenvolver conexões significativas com a realidade, com o mundo do aluno. Para esta finalidade precisamos de professores que saibam o que *realmente é fundamental* em estocástica. (p. 203)

2.1.3. Dificuldades dos alunos na resolução de problemas de Combinatória

As investigações mostram que as dificuldades que os alunos apresentam em probabilidades devem-se a um deficiente raciocínio combinatório. Assim, um raciocínio combinatório adequado será um pré-requisito para o ensino das probabilidades no currículo do ensino secundário.

Para Piaget, a capacidade para resolver problemas combinatórios depende da idade, do estágio de desenvolvimento em que se encontra o aluno, o que possivelmente não é verdadeiro no domínio da estocástica. Isto é provado por investigações realizadas, onde adultos, mesmo com formação universitária, não apresentam um desempenho mais correcto que as crianças. Há ideias, assim como há *erros* que são partilhados por sujeitos de diferentes idades e com diferentes origens culturais (Heitele, 1975).

Segundo Batanero *et al.* (1997a), novas abordagens de avaliação têm como objectivo captar a maneira dos alunos pensarem, de raciocinarem e de aplicarem a sua aprendizagem. Ora isto requer que nos concentremos no problema da avaliação do conhecimento matemático de uma perspectiva nova. O objectivo é avaliar os processos implícitos, e não somente medir o grau em que os alunos adquiriram um determinado conteúdo. A avaliação não é o objectivo de experimentações educacionais, mas sim um processo dinâmico e contínuo que pode ser usado

pelos professores para ajudar os alunos a alcançarem objectivos curriculares. Por essa razão, um ponto essencial na avaliação do raciocínio combinatório é a identificação das dificuldades dos alunos ao resolverem problemas de Combinatória, algumas das quais são descritas de seguida, no quadro 4.

Quadro 4 - Dificuldades em Combinatória, segundo Batanero *et al.* (1997a, 1997b)

Enumeração não sistemática	Esta dificuldade consiste em tentar resolver o problema por enumeração, usando a tentativa e o erro, sem nenhum procedimento recursivo, conducente à formação de todas as possibilidades.
Uso incorrecto do diagrama de árvore	Diagramas de árvore são um dos recursos mais úteis para visualizar tanto as situações de combinatória como as de probabilidades. Segundo Fischbein (1975), eles apresentam características intuitivas importantes, oferecem uma representação global da estrutura de situação, o que contribui para a imediatez da compreensão e para se encontrar uma solução do problema. Apesar desta importância, os alunos acham difícil construir diagramas de árvore adequadas para representar situações de problemas e, assim, este tipo de representação é causa de muitos erros.
Erro de ordem	Este erro consiste em confundir os critérios para as combinações com os dos arranjos, isto é, distinguir a ordem dos elementos quando é irrelevante ou, pelo contrário, não considerar a ordem quando ela é essencial.
Erro de repetição	O aluno não considera a possibilidade de repetir os elementos quando isso é possível, ou repete-os quando não há possibilidade de o fazer.
Confundir o tipo de objecto	Este erro ocorre quando os alunos consideram que objectos idênticos são distinguíveis ou que objectos diferentes são indistinguíveis.
Interpretar erradamente o tipo de partição requerida	Esta dificuldade pode ocorrer das duas maneiras seguintes: a união de todos os subconjuntos numa partição não contém todos os elementos do conjunto total, ou algumas partições possíveis são esquecidas.

A interpretação do enunciado de um problema foi também identificada por Batanero *et al.* (1994) como uma dificuldade que os alunos apresentam. Segundo Watson (1996) as dificuldades também emergem na decomposição em subproblemas do problema inicial, pois os problemas obtidos poderão continuar a ser de difícil resolução ou poderá ser difícil encontrar a decomposição adequada. Devemos considerar esta variedade de variáveis quando avaliamos o cálculo combinatório, se queremos obter uma ideia mais abrangente das capacidades e dos conceitos desenvolvidos pelos alunos.

Estas dificuldades também necessitam de ser reconhecidas quando organizamos o nosso ensino, o qual deve enfatizar o processo de modelação, o cálculo recursivo e os procedimentos sistemáticos de enumeração, em vez de se concentrar somente em aspectos algorítmicos e na definição e aplicação das operações combinatórias.

A informação e a análise cuidadosa das respostas dos nossos alunos são uma parte essencial no nosso sucesso como professores. Particularmente benéfico para a nossa compreensão das dificuldades dos alunos, para além do cálculo combinatório, é a classificação de tais respostas em categorias claramente definidas. Uma apreciação completa desta informação ajudar-nos-á como professores, dado que atribuímos significado compatível com o progresso dos nossos alunos em combinatória.

A investigação de Batanero *et al.* (1997b) mostrou que os três tipos de modelos combinatórios (quadro 2) não são de igual dificuldade, mesmo após ter sido dada instrução. A partir da sua investigação exploraram outros factores que influenciam a dificuldade da resolução de problemas, em alunos de 14-15 anos. Estes factores incluem o tipo de operação combinatória, nomeadamente permutações (a ordem interessa), combinações (a ordem não interessa), arranjos, (com e sem repetição). Os outros factores foram a natureza dos elementos (dígitos, letras, pessoas e objectos) e o número de elementos.

Antes da instrução, havia pouca diferença no nível de dificuldade dos três tipos de modelos combinatórios. O tipo principal de dificuldade, antes da instrução, era a inability dos alunos para, de uma forma sistemática, fazerem a enumeração de itens. Depois que lhes foi leccionado a Combinatória (como parte do seu currículo escolar normal) houve uma redução no nível de dificuldade dos problemas de selecção, nomeadamente nos problemas de arranjos, e nos da permutações com repetição, mas não nos problemas de partição e distribuição.

2.1.4. Intervenções de ensino em Combinatória

Correia, Fernandes e Almeida (2009) implementaram uma intervenção de ensino das operações combinatórias, com 23 alunos de uma turma de 12.º ano, no início do ano lectivo de 2008/2009, enfatizando a sequencialização das operações – arranjos completos, arranjos simples, permutações e combinações, as ideias prévias dos alunos sobre estas operações, a aprendizagem por descoberta e o trabalho de grupo. Na abordagem das diferentes operações combinatórias partiu-se de uma actividade de descoberta, que consistia na ampliação das questões do teste de Correia (2008), seguindo-se a resolução de uma ficha de trabalho sobre o conteúdo leccionado. Em todas as questões da ficha de trabalho eram incluídas as respectivas soluções, no sentido de permitir aos alunos validar as suas respostas, e salientaram-se as relações entre as diferentes operações combinatórias à medida que eram introduzidas.

Depois de concluída a intervenção de ensino, foi administrado um teste em duas fases, para avaliar as aquisições cognitivas dos alunos e um questionário para recolher a sua opinião acerca da intervenção de ensino.

As resoluções dos alunos permitiram especular sobre a influência da intervenção de ensino no desenvolvimento das capacidades de raciocínio combinatório e das conexões entre as operações combinatórias, em detrimento de um ensino mais centrado na aplicação de fórmulas. Os erros identificados na fase I do teste relacionaram-se, predominantemente, com os *operandos* e a *ordem*, seguindo-se a *repetição*, a *operação combinatória*, os *parâmetros*, a *operação numérica* e a *enumeração*.

A grande maioria dos alunos gostou de resolver os problemas propostos, tendo despertado o seu interesse pela Combinatória, não considerou o tema como sendo mais difícil do que os outros temas de Matemática e valorizou a metodologia implementada no ensino e aprendizagem do tema. Na opinião de todos os alunos, as soluções numéricas, fornecidas nas fichas de trabalho e na segunda fase do teste, ajudaram na detecção de falhas de raciocínio.

À semelhança das estratégias utilizadas pelos alunos na resolução dos problemas propostos durante a intervenção de ensino, no teste, as estratégias de resolução dos problemas combinatórios revelaram-se diversificadas, apoiando-se essencialmente em desenhos e operações numéricas e menos frequentemente em fórmulas, das quais a fórmula das combinações simples foi a mais usada.

Eizenberg e Zaslavsky (2003) desenvolveram uma intervenção de ensino com alunos do ensino superior, em que compararam o impacto do trabalho colaborativo em pares com o trabalho individual na resolução de problemas combinatórios. Do estudo realizado, os autores concluíram que a resolução colaborativa dos problemas permitiu aos alunos ultrapassarem dificuldades que os alunos que trabalharam individualmente não conseguiram superar. Inferiram ainda que a colaboração em pares potencia o desenvolvimento de atitudes e capacidades favoráveis à resolução destes problemas.

Também Almeida e Ferreira (s/d) planificaram e concretizaram uma proposta de ensino de Análise Combinatória, enfatizando a resolução de problemas e investigações matemáticas na sala de aula, no âmbito de um estudo piloto com alunos de uma turma de 2.º ano do Ensino Médio.

Com o objectivo de tentar encontrar um processo de colmatar as dificuldades dos alunos, as investigadoras propuseram-se identificar e analisar os seus raciocínios e erros cometidos na

resolução de problemas combinatórios, através da aplicação de um pré-teste antes da instrução formal do tema. Constataram que poucos alunos usaram processos como esquemas, desenhos ou qualquer justificação escrita e usaram apenas operações na resolução das questões. O mesmo teste foi ministrado como pós-teste, acompanhado de uma apresentação e discussão oral no grupo turma de todas as respostas apresentadas, no sentido de fazer um balanço de todo o trabalho desenvolvido.

No início da experiência de ensino administraram-se problemas mais fáceis, e posteriormente, foram propostos problemas com grau de dificuldade variado, considerando o factor surpresa uma forma de motivação. No decorrer do estudo piloto, na sala de aula, os alunos, organizados em grupos de 4 ou 5 elementos, trabalharam autonomamente através da partilha de ideias, de discussões, usando estratégias próprias que validaram dentro do próprio grupo, prescindindo da ajuda da professora, que assumiu o papel de questionar e auxiliar todo o trabalho desenvolvido. No final, cada grupo apresentava, através do uso de transparências, as suas resoluções e conclusões, alargando a discussão e confronto de ideias ao grupo turma. Este tipo de prática permitiu à professora perceber, em vários momentos, a evolução do raciocínio combinatório dos alunos.

No pós-teste, verificou-se que os alunos justificaram as suas respostas e muitas questões foram resolvidas através da construção do *diagrama de árvore*. Esta estratégia e forma de representação, que a maioria dos alunos apropriou, foi bastante trabalhada durante as aulas e no teste os alunos usaram-na como suporte para a generalização. Os alunos também justificaram determinadas operações através da redacção de pequenos textos e recorreram, em menor percentagem, à enumeração das configurações. Salientou-se ainda o facto de os alunos usarem nas suas respostas os princípios da multiplicação e da adição e de justificarem processos de resolução dos problemas sem utilizarem fórmulas.

Em termos de erros, foram identificados muitos erros de interpretação do enunciado e de cálculo, tendo a maioria dos alunos superado o erro de ordem.

A par do raciocínio combinatório, verificou-se também a evolução das relações estabelecidas nos grupos de trabalho. Quando questionados, 75% dos alunos responderam que gostaram de trabalhar segundo a metodologia de ensino adoptada, mas que a apresentação oral das resoluções se tinha tornado cansativa.

2.2. Concepções dos professores em Combinatória

Os processos de formação de concepções começam muito cedo na vida: Korthagen e Lagerwerf (2001) dá um exemplo de um bebé e o que significa para ele a sua mãe. No entanto, esta concepção do que é a mulher é completamente diferente da que o marido tem sobre esta. Através das várias experiências de vida, as concepções tornam-se tácitas nas pessoas. Estas concepções estão intimamente ligadas a situações concretas através das quais elas são desencadeadas. O mesmo autor considera que “todos sabem o que é aprender e o que é ensinar. Todos já aprenderam algo ou ensinaram algo, não sendo necessárias definições destas palavras. Estas concepções não são só de natureza cognitiva, pois também abarcam sentimentos, necessidades, valores, e experiências prévias” (p. 179).

Segundo Garnica e Fernandes (2002),

as concepções são regras de acção, implica aceitar que as investigações sobre essas concepções devem centrar-se na manifestação – quer seja no discurso quer seja na efectividade da prática – das crenças sobre algo que, aos sujeitos, é próximo, familiar, ou (...) nos momentos em que descrevem (ou vivenciam) situações específicas. (p. 76)

Uma característica das *gestalt(s)* (Korthagen & Lagerwerf, 2001, p.180) é que elas são inferidas de situações onde a pessoa tem alguma espécie de incerteza, de necessidade ou preocupação (Korthagen & Lagerwerf, 2001; Garnica & Fernandes, 2002). Uma *gestalt* de aprendizagem e ensino desenvolve-se na criança em idade escolar, quando a criança tem que lidar com o que se passa na sala de aula. A necessidade ou preocupação não só desencadeia o processo de formação de *gestalt*, mas dá cor à percepção concentrando-se na atenção: umas coisas tornam-se importantes, outras são desconsideradas; o que é importante é o que ajuda a satisfazer a necessidade. Assim, uma *gestalt* de aprendizagem pode estar ligada a um sentimento de “trabalho intenso”. Outra característica da *gestalt* é o facto de que conceitos subjacentes ou regras raramente são tornados explícitos, não são facilmente observáveis influenciando, no entanto, a forma de pensar e de agir, interferindo no modo como se vê e nas interpretações que se fazem acerca de algo. Deste modo, as concepções que se possuem resultam de um processo de formação individual e social, que interagem entre si (Ponte, 1992).

Thompson (1992) define concepções como “uma estrutura mental mais geral, incluindo crenças, significados, conceitos, proposições, regras, imagens mentais, preferências e outras coisas semelhantes” (p. 29).

Segundo Garnica e Fernandes (2002), citando José Carrillo e Luis Contreras, concepções são “operadores que actuam no processo de transformação de conhecimentos em situação didáctica e no próprio controlo da interacção situação-aluno” (p. 77). Para Ponte (1992) as concepções:

Actuam como uma espécie de filtro. Por um lado, são indispensáveis pois estruturam o sentido que damos às coisas. Por outro lado, actuam como elemento bloqueador em relação a novas realidades ou a certos problemas, limitando as nossas possibilidades de actuação e compreensão. (p.185)

O contexto em que estão inseridos os professores torna-se cada vez mais importante, pois não faz sentido estudar as concepções desligadas das práticas pedagógicas, das condições de trabalho e dos recursos disponíveis, enfatizando, por exemplo, o trabalho colaborativo como potenciador de mudanças em detrimento do isolamento profissional.

O grande interesse no estudo das concepções reside no facto de que estas desempenham um papel estruturante no pensamento e na prática do professor, condicionando a sua forma de pensar e de agir. Assim sendo, torna-se necessário que os professores explicitem os seus pensamentos e as suas ideias em confronto com outras, assumindo, deste modo, um papel preponderante o grupo de trabalho em que o professor está incluído. Compete, então, à equipa de trabalho propor tarefas e situações de ensino, mesmo sendo através de “abordagem indirecta” (Garnica & Fernandes, 2002, p. 77) de modo a proporcionar um ambiente favorável à exposição das concepções de cada um no sentido de modificá-las, se for o caso.

Segundo Korthagen e Lagerwerf (2001) e Alarcão (1996) há técnicas específicas, nomeadamente estratégias promotoras de atitudes reflexivas e de uma formação permanente dos professores, que permitem que os docentes reflectam sobre as suas crenças acerca do ensino, assim como sobre os *construtos* que usam na sua percepção dos estudantes.

Cada técnica concentra-se nos tipos especiais de relações no âmbito das estruturas mentais dos professores, da sua percepção sobre o seu comportamento perante o ensino. Sob a influência das técnicas, estas estruturas mentais mudam de concepções subconscientes para esquemas cognitivos conscientes. Este processo de mudança é muito importante, pois torna possível a reflexão crítica e o reenquadramento.

É de referir que actualmente ganha terreno a investigação em torno das crenças do professor em relação às tarefas, ao discurso e aos objectivos curriculares, para além dos estudos já desenvolvidos acerca das concepções dos professores sobre a matemática e o ensino da matemática.

Uma abordagem eficiente ao ensino da Combinatória requer, não apenas situações de aprendizagem inovadoras no sentido de explorar novos contextos e novas ferramentas para o acesso e construção de conhecimento por parte dos alunos, como também a aceitação e apropriação de tais situações pelos professores. Que condições favorecem uma verdadeira apropriação dessa inovação pelo professor?

No que se refere à análise da influência das concepções dos docentes na sua prática, referimos o estudo realizado por Ferreira (2007), intitulado “Ensino da Combinatória no 12.º ano de Escolaridade: Análise das estratégias de ensino”. Este estudo analisa as crenças dos professores envolvidos sobre o ensino da Combinatória, verificando que “As concepções dos professores sobre combinatória parecem criar diferentes expectativas sobre o desempenho dos seus alunos” (p. 225). A insegurança científica de uma professora fez anteciper que os seus alunos iriam sentir muita dificuldade e achar o tema difícil. Outra participante, referindo-se ao tema com agrado, adiantou que os alunos iriam reagir bem, não sentindo dificuldades na sua compreensão.

A mesma investigadora recomenda “ainda o estudo da sua evolução [das concepções], atendendo a factores como: experiência profissional, trabalho colaborativo e reflexão sobre o processo de ensino, numa lógica de desenvolvimento profissional” (p.239).

2.3. Conceito e papel da reflexão

2.3.1. Conceito de reflexão

Aprender é reconstruir, remodelar, integrar o novo no conhecido. Professores reflexivos são aqueles que examinam, questionam e avaliam criticamente a sua prática e desse questionamento e reflexão contínua sobre a prática, de modo articulado, surge a reconstrução de saberes anteriores.

O professor é sujeito do seu próprio desenvolvimento profissional, o qual tem por objectivo a aprendizagem e o desenvolvimento dos alunos, processo em que a reflexão sobre a experiência prática é fundamental. O que se propõe é que o professor deixe de ser um técnico, para se tornar num “investigador na sala de aula”, um “prático reflexivo”, um “prático autónomo” ou um “artista” capaz de criar as suas próprias acções, de administrar a complexidade do real e de resolver situações problemáticas (Alarcão, 1996). Desta forma, ser professor reflexivo é envolver-se na dinâmica teoria/prática, pensamento/acção, mental/manual

e professor/investigador e ainda, segundo Korthagen (2001a), “desempenhar um papel mais activo na tomada de decisões educativas” (p. 53).

Na opinião de Korthagen (2001b):

O cérebro faz uso de duas formas diferentes de processamento de informação, uma forma racional e uma não racional, correspondendo, de uma maneira grosseira, aos dois hemisférios. O processamento da informação não racional desempenha um papel central no ensino, como mostra a linguagem da prática, mas a visão comum da reflexão, fundada na ideia de Dewey da ordenação consecutiva, é unilateral e não toma em atenção as formas menos conscientes do professor, o seu ‘conhecimento’ e momentos de ‘fluxo’. Esta unilateralidade é devida a influências culturais e ao facto de que a análise racional de situações de ensino pode ser mais facilmente comunicável através da linguagem comum.

Uma visão mais alargada da reflexão pode ser caracterizada pelo conceito de espelhar, e pode ser usada a observação de diferentes tipos de espelhos: racional e holística. A integração de diferentes modos de reflexão é mais produtiva. (p. 238)

Os professores reflexivos são autónomos na sua actividade, visto que são críticos em relação à sua prática e permitirão desenvolver essa mesma atitude nos próprios alunos.

A reflexão ajuda os professores a tomarem consciência das relações entre as suas acções e os seus processos internos. A essência desta definição é o processo mental de estruturar ou reestruturar, que pode ocorrer de uma forma não linguística e holística. A integração de ambos os tipos de reflexão (o espelhar de processos não racionais e a análise racional) seria benéfica porque estão directamente relacionados com as duas formas diferentes nas quais a consciência do professor trabalha. A reflexão concebida como a integração da análise racional e o processo de tornar consciente as formas orientadoras parece concentrar-se na individualidade do professor. No que toca a influências contextuais no ensino, a reflexão sobre o processamento da informação é muito importante. Pode ajudar os professores a tomarem consciência dos valores que incorporaram durante a sua socialização na profissão e as origens das suas formas orientadoras. A reflexão, concebida desta forma, pode potencializar o poder de cada professor em dar um contributo pessoal, inovador e criativo à educação (Korthagen, 2001a, 2001b).

Calderhead (1989), defende que “a reflexão é considerada como um meio no sentido da emancipação e da autonomia profissional” (pp. 44-45).

Há um corpo de conhecimento existente acerca do ensino e um dado contexto educativo. Isto leva a que o professor tenha de adquirir certas competências, nomeadamente de investigação, auto-actualização, reflexão sobre a experiência, análise e reorganização, entre outras (Korthagen, 2001a).

A reflexão é uma dimensão importante no desenvolvimento do professor. Assim, também o é na actividade de supervisão. Conforme Amaral, Moreira e Ribeiro (1996), a supervisão apoia-se em estratégias de reflexão/formação. A reflexão surge como uma estratégia a desenvolver nos professores, em três domínios: técnico, prático e crítico ou emancipatório. No domínio técnico, a reflexão visa que os formandos atinjam determinados objectivos, a curto prazo. Os formandos devem reflectir sobre o seu próprio ensino — a reflexão sobre a acção. No domínio prático, a reflexão preocupa-se com os pressupostos, valores e consequências ligados à acção. Assim, a reflexão é o instrumento através do qual as experiências são traduzidas em conhecimento dinâmico na perspectiva de Korthagen (2001a). No domínio crítico ou emancipatório, a reflexão centra-se nos aspectos éticos, sociais e políticos. O formando, desde o início da sua formação, começa a compreender que todo o seu trabalho pode servir interesses diferentes dos dos alunos que ensina. Só partindo da sala de aula é que se pode relacionar depois a prática com os valores educativos.

Outra concepção é apresentada por Dewey (Oliveira & Serrazina, 2002; Zeichener, 1993). Para ele, as destrezas necessárias para um professor reflexivo são uma mentalidade aberta, a responsabilidade intelectual e o entusiasmo pessoal no exercício da sua função. Estes professores têm de reconhecer o erro, escutar e respeitar diferentes perspectivas, assegurando-se da integridade, coerência e harmonia daquilo que defendem. Devem conseguir predispor-se para enfrentar a actividade com curiosidade, energia, capacidade de renovação e de luta contra a rotina e o quotidiano. A investigação colaborativa surge, para os professores, como uma possibilidade de reflexão bastante mais exigente do que a reflexão habitual do dia-a-dia (Ponte, 2002). Para Zeichener (1993), Dewey:

Definiu a acção reflexiva como sendo uma acção que implica uma consideração activa, persistente e cuidadosa daquilo em que se acredita ou que se pratica à luz dos motivos que o justificam e das consequências a que conduz. (...) a reflexão não consiste num conjunto de passos ou procedimentos específicos a serem usados pelos professores. Pelo contrário, é uma maneira de encarar e responder aos problemas, uma maneira de ser professor. (...) A reflexão implica intuição, emoção e paixão. (p. 18)

Para tal, a reflexão surge como um conceito ligado às novas tendências da formação inicial de professores. A aquisição do conhecimento profissional emerge na reflexão sobre a prática, permitindo uma integração e articulação entre a teoria e a prática e a transformação de saberes científicos em conhecimentos pedagógicos (Alarcão, 1996).

Três razões têm sido usualmente apontadas para justificar a formação continuada de professores. A primeira surge da necessidade de um contínuo aperfeiçoamento profissional e de reflexões críticas sobre a própria prática pedagógica, pois a melhoria efectiva do processo de ensino-aprendizagem só acontece através da acção do professor, uma vez que o fenómeno educativo é complexo e singular, não existindo um *receituário* pronto nem soluções padrão. A segunda razão diz respeito à necessidade de superar barreiras entre a pesquisa educacional e a sua adopção para a melhoria do processo ensino-aprendizagem, implicando também que o professor seja investigador da sua própria prática pedagógica. Relativamente à terceira razão, aponta-se que, no geral, os professores têm uma visão simplista da actividade docente, pois concebem que, para ensinar, basta conhecer o conteúdo e utilizar técnicas pedagógicas.

Desta forma, podemos dizer que o principal objectivo da formação de professores é o de estimular uma perspectiva crítico-reflexiva deste processo, permitindo-lhes a construção de um pensamento autónomo e de dinâmicas de auto-formação participada. É difícil implementar esta atitude pela falta de tradição, falta de condições, exigência do processo de reflexão e, sobretudo, pela falta de vontade de mudar. Na opinião de Alarcão (1996), “quem não se sentir atraído pela vontade de mudar e de inovar, esse não será autónomo; continuará dependente” (p. 186).

Acreditamos ser pela reflexão que o professor se conhecerá a si próprio, se questionará a si mesmo e expandirá o seu desenvolvimento profissional. “A ideia de basear a aprendizagem profissional em reflexão sistemática será comparada com outro desenvolvimento no campo do ensino e ensino de professores, nomeadamente, o uso da investigação da acção pelos professores” (Korthagen, 2001a, p. 52).

Numa escola reflexiva, Alarcão (2004) sugere que os professores necessitam ter vários conhecimentos: conhecimento do conteúdo disciplinar, conhecimento do currículo, conhecimento do aluno e de suas características, conhecimento dos contextos, conhecimento dos fins educativos, conhecimento de si mesmo e conhecimento da sua filiação profissional. Esses conhecimentos são necessários, enquanto base para um trabalho que vê no outro a extensão de si mesmo.

A escola requer a existência de professores reflexivos, que pensem e programem acções visando a qualidade de ensino e aprendizagem. Deseja-se, assim, um professor autor de ideias e pensamentos, que procure respostas para as suas indagações e não seja um mero reproduzidor de práticas não reflectidas.

2.3.2. Estratégias de reflexão/formação

Segundo Garcia (1995), “para mobilizar o conceito de reflexão na formação de professores é necessário criar condições de colaboração e de trabalho em equipa entre os professores, que facilitem e justifiquem a aplicação de modelos e de estratégias reflexivas” (p. 64). Amaral *et al.* (1996) aponta, também, que, para implementar um programa de formação de professores, várias estratégias são necessárias: perguntas pedagógicas, narrativas, análise de casos, observação de aulas, trabalho de projecto, investigação-acção. Estas medidas são apresentadas no quadro 5.

Quadro 5 – Descrição de estratégias promotoras de atitudes reflexivas e de uma formação permanente dos professores

Perguntas Pedagógicas		
Desvendam forças sociais, culturais e políticas que adaptam o ensino e impedem os professores de mudarem as práticas mais enraizadas.		
Papel (das Perguntas Pedagógicas)	Inicia e objectiva uma tarefa de reflexão. Ajuda a reorganizar a experiência de ensino do professor. Permite desenvolver o trabalho sobre um discurso mais organizado.	O que faço? O que penso?
	Interpretação Permite descobrir os princípios que informam as práticas e as teorias. Através do questionamento dos porquês dos actos de ensino, o professor, pelo diálogo consigo próprio e com os outros, vislumbra as forças que o levam a agir como age.	O que significa isto?
	Confronto Através de considerações de concepções e práticas alternativas, o supervisor procura que o professor possa legitimar as teorias subjacentes ao ensino – teorias que não são construção individual, mas produto de normas culturais com raízes profundas de que não nos damos conta.	Como me tornei assim?
	Reconstrução Pela reconstrução das suas crenças, o professor vai alterar as suas práticas. Vai aperceber-se que o ensino não é uma realidade imutável, definida por outros, mas contestável na sua essência. Vai ganhando controlo sobre si mesmo, de modo a sentir-se capaz de decidir o que é melhor para a sua prática.	Como me poderei modificar?
As Narrativas		
São registos dos acontecimentos da nossa prática pedagógica. Usadas para a avaliação formativa e sumativa, permitem a promoção da reflexão sobre a acção.		
Tipos (de narrativas)	Diário de Bordo (<i>log</i>) – é o mais objectivo;	
	Diário íntimo (<i>diary</i>) – permite distanciamento do quotidiano, uma reflexão e um diálogo íntimo connosco próprios;	
	Registo quotidiano (<i>journal</i>) – é a reconstrução da experiência vivida. Inclui	

	características do diário íntimo e do diário de bordo. Permite tomar consciência do que foi objectivo e subjectivo.
<p style="text-align: center;">A Análise de Casos</p> <p>São registo dos acontecimentos, reais e problemáticos de sala de aula, abrangendo toda a complexidade do acto educativo. Assemelham-se às narrativas. Representam o conhecimento teórico. Dão acesso às crenças dos professores sobre o ensino.</p>	
Momentos (da análise de Casos)	1. Planificação e definição dos objectivos do que se quer ensinar;
	2. A acção propriamente dita – o que aconteceu, as dificuldades e os problemas, as incertezas, o conflito não solucionado;
	3. A resolução do conflito, a recapitulação, a reflexão – o professor obtém um conhecimento mais profundo sobre o sucedido e sobre a repercussão que teve nos alunos e em si próprio.
<p style="text-align: center;">A Observação de aulas</p> <p>É o ponto de partida para o desenvolvimento profissional do professor. Centra-se na sala de aula e nos processos instrucionais que nela ocorrem.</p>	
Tipos (de observação de aulas)	Naturalista – o observador regista tudo o que ocorre dentro da sala, acumulando dados num <i>continuum</i> ;
	Ocasional – selecciona comportamentos a registar. Focaliza determinado aspecto, geralmente chamado “incidente crítico”. Isola determinado aspecto. Após a identificação de um problema, segue-se a elaboração de um plano para a sua resolução.
	Sistemática – regista, através de sistema de sinais ou de categorias, um inventário de comportamentos que se assinalam à medida que vão ocorrendo. Cada comportamento individual é objecto de registo.
<p style="text-align: center;">O trabalho de projecto</p> <p>Estudo de um problema ou problemas considerados de interesse por um grupo. Implica a formulação definitiva de um problema.</p>	
Exigências (do trabalho de projecto)	Observação objectiva das circunstâncias oferecidas pelo meio.
	Conhecimento de experiências anteriores.
	Escuta de conselhos.
	Avaliação das observações e recordações anteriores.
<p style="text-align: center;">A investigação-acção</p> <p>Metodologia caracterizada pela dinâmica entre a teoria e a prática. O professor interfere no próprio terreno de pesquisa, analisando as consequências da sua acção e produzindo efeitos directos sobre a prática.</p>	
Fases (da investigação-acção)	Planear – no sentido de melhorar uma situação, definir um plano de acção.
	Agir – concretização do plano de acção.
	Observar – “recolha e análise de informação” (Amaral <i>et al.</i> , 1996, p. 116)
	Reflectir – sobre a observação, podendo implicar a construção de novo plano de acção (ciclo).

O estudo que se realizou centrou-se numa situação de formação desenvolvida através de projecto de investigação-acção, onde se pretendeu que os professores participantes, mobilizando as suas experiências prévias, se assumissem como agentes da sua própria mudança e do meio envolvente, contribuindo, deste modo, para o seu desenvolvimento profissional (Caetano, 2004). Esta mesma autora afirma a respeito da investigação-acção:

Entende-se por investigação-acção um dispositivo onde os processos de acção educativa e investigação se produzem mutuamente, pelo que a investigação acompanha a acção e a acção surge como um dos processos de investigação para a construção de uma compreensão/conhecimento sobre a acção e contextos, sendo este conhecimento reinvestido na própria acção, pois visa a sua regulação/transformação. (p. 99)

Ponte (1994) acrescenta que este tipo de estudos “constituem trabalhos de intervenção, em que as problemáticas e as decisões relativas ao desenvolvimento da investigação são fortemente partilhadas pelo investigador e os participantes, e que recorrem usualmente a metodologias qualitativas” (p. 6).

Segundo Day, citando Somekh (1988) e McCutcheon & Jung (1990), a investigação-acção define-se como “o estudo de uma situação social que envolve os próprios participantes como investigadores e que visa melhorar a qualidade da acção” e é uma “investigação sistemática, colectiva, colaborativa, auto-reflexiva e crítica. As suas metas são a compreensão da prática e a sua articulação com uma racionalidade ou filosofia da prática com vista à sua melhoria” (2001, p. 64). Por outro lado, esta investigação deve ser encarada “como uma forma de emancipação através do conhecimento” (Day, 2001, p. 73), situando-se num nível “crítico-reflexivo”.

A investigação-acção é uma metodologia caracterizada pela dinâmica entre a teoria e a prática. É um meio que estimula e desenvolve o pensamento crítico e a inteligência emocional (Day, 2001). O professor interfere no próprio terreno de pesquisa, analisando as consequências da sua acção e produzindo efeitos directos sobre a prática. O professor procura trabalhar o conhecimento já existente, convertendo-o em hipóteses-acção, e procura estabelecer uma relação entre a teoria, a acção e o contexto particular.

Para Amaral *et al.* (1996), a investigação-acção “constitui uma forma de reflexão que pode ser levada a cabo pelo próprio professor, abrindo caminho a uma forma de autoformação actualmente considerada potencialmente enriquecedora” (p. 117).

Os problemas surgem na prática e o envolvimento do professor é fundamental. Não se procura apenas resolver o(s) problema(s), procura-se também que a actividade educativa seja melhorada.

Ponte (2002) alerta para a necessidade de se definirem "procedimentos de trabalho e critérios de qualidade próprios para a investigação que os professores realizam sobre a sua prática" (pp. 23-24) e Alarcão (2001) assinala os prejuízos de não se levar a sério esta forma de investigação:

Pensa-se por vezes na investigação-acção como uma espécie de "faz-de-conta" da investigação. Aceita-se às vezes que ela não seja mais do que isso. E deixam-se no ar muitas investigações bem pertinentes por falta de sistematização e rigor. (p. 27)

Assim, a investigação deve ser encarada “como uma forma de emancipação através do conhecimento” (Day, 2001, p. 73) situando-se num nível “crítico-reflexivo”.

2.4. O conhecimento profissional do professor

Schön (1987) defende que os limites de uma formação voltada para a reprodução estão definidos temporalmente e defende a sua substituição, atribuindo ao professor capacidades de reflexão crítica sobre as suas acções. O professor não deve ser o especialista que aplica conhecimentos, mas um “prático reflexivo”. Ao reflectir sobre a sua prática, o professor desenvolve uma actividade investigativa que o caracterizará como produtor de conhecimentos práticos sobre o ensino e não mais como um especialista técnico, que apenas reproduz conhecimentos (Schön, 1987).

Segundo Alarcão e Tavares (2003), referindo-se a Bruner, o desenvolvimento profissional dos professores é favorecido pela verbalização do seu pensamento reflexivo e, neste processo, a linguagem funciona como amplificadora da capacidade cognitiva. No diálogo construtivo que se estabelece entre professores, todos são parceiros da mesma comunidade profissional, interessados em inovar e provocar mudanças nos contextos educativos.

O desenvolvimento do conhecimento do professor é um processo complexo e continuado que se efectua ao longo do seu desempenho profissional, reconstruindo-se permanentemente, com vista ao aperfeiçoamento da prática docente, baseado na observação, na reflexão e na análise das situações reais de ensino.

Na visão do professor como investigador, este deve construir o seu conhecimento profissional em diversos momentos, relacionando o conhecimento científico com a investigação e

a resolução de problemas com que se vai deparando ao longo da sua actividade profissional. Ao reflectir sobre a sua experiência, o professor distingue-se dos demais, uma vez que não se restringe ao acumular de experiências que, em muitos casos, se transformam em práticas meramente rotineiras. Ora, em consequência, sobressai então a necessidade do professor conjugar o conhecimento adquirido, em contexto académico, com o conhecimento que resulta da reflexão sobre a sua prática, evoluindo, neste processo, para a definição do seu próprio estatuto de profissional.

A competência profissional do professor, que o distingue das restantes profissões, manifesta-se na sua prática diária quando tem de ser capaz de agir em situações de grande pressão e em tempo oportuno.

A aprendizagem e o desenvolvimento estão interligados, uma vez que exercem uma acção mútua. Mediante o nível de desenvolvimento do aluno, o professor apresenta tarefas de aprendizagens diferenciadas. O professor é, nesta situação, o responsável pelo desenrolar de todo este processo. Analogamente ao que acontece com os alunos, também os professores estão sujeitos a determinadas tarefas de aprendizagem mediante os seus níveis de desenvolvimento. No entanto, como adulto que é, o seu papel assume uma maior responsabilidade.

Relativamente à formação do professor, a Lei de Bases do Sistema Educativo Português, no seu artigo 30.º, alíneas f), g) e h), refere:

- f) Formação que, em referência à realidade social, estimule uma atitude simultaneamente crítica e actuante;
- g) Formação que favoreça e estimule a inovação e a investigação, nomeadamente em relação com a actividade educativa; e
- h) Formação participada que conduza a uma prática reflexiva e continuada de auto-informação e auto-aprendizagem.

2.4.1. A perspectiva de Shulman sobre o conhecimento docente

À medida que se começa a verificar a complexidade do conhecimento e da transmissão do conteúdo, torna-se visível a necessidade de uma estrutura teórica coerente. Este construto teórico tem por propósito mostrar quais são os domínios e as categorias do conhecimento de interesse dos professores. Por exemplo: desvendar como se relacionam o conhecimento do conteúdo e o conhecimento pedagógico geral; de que forma os domínios e as categorias do conhecimento estão representados nas mentes dos docentes; e que formas existem que potenciam a aquisição e o desenvolvimento de tal conhecimento.

Interessa, assim, apontar algumas formas de pensar acerca do conhecimento do conteúdo de ensino e sobre algumas das suas categorias.

Shulman (1986) aponta três categorias de conhecimento de conteúdo:

- a) conhecimento do conteúdo da disciplina;
- b) conhecimento do conteúdo pedagógico;
- c) conhecimento curricular.

O *conhecimento do conteúdo da disciplina* refere-se à quantidade e organização do conhecimento *per se* na mente do professor. Há uma série de maneiras de representar este conhecimento: a taxionomia cognitiva de Bloom; as variedades de aprendizagem de Gagné; a distinção de Schwab entre as estruturas substantivas, que são a variedade de formas nas quais os conceitos básicos e os princípios da disciplina são organizados para incorporar os factos, e as estruturas sintácticas do conhecimento, que são o conjunto de formas nas quais a verdade ou a falsidade, a validade ou a invalidade são estabelecidas; e as noções de Peter, que se assemelham às de Schwab.

Nas diferentes áreas da disciplina, as formas de discutir a estrutura do conteúdo do conhecimento podem variar. Pensar adequadamente sobre o conhecimento do conteúdo requer ir além do conhecimento dos factos ou conceitos de um domínio e requer compreender as estruturas da disciplina da forma definida.

Quando existem afirmações concorrentes dizendo respeito a um determinado fenómeno, a sintaxe de uma disciplina fornece as regras para determinar qual afirmação tem uma validade/mandato mais forte. Uma sintaxe é como uma gramática. É o conjunto das regras que determina o que é legítimo dizer num domínio disciplinar e o que “quebra” essas regras.

Os professores devem, não só ser capazes de definir para os alunos as verdades aceites num domínio, mas também explicar por que é que uma determinada afirmação é correcta, que razões determinam o nosso conhecimento dela e como ela se relaciona com outras afirmações, tanto dentro da disciplina como fora, tanto na teoria como na prática. Assim, o professor de Matemática tem de compreender que há uma grande variedade de formas de organizar a disciplina.

O professor precisa não só de saber que algo é assim, como, para além disso, tem de compreender por que é assim, de que forma a sua justificação pode ser validada e em que circunstâncias a crença na sua justificação pode ser enfraquecida ou até negada. Além disso, espera-se que o professor compreenda até que ponto um determinado tópico é particularmente

proeminente numa disciplina, enquanto outro é relativamente periférico. Isto será importante nos julgamentos pedagógicos subsequentes, que dizem respeito à ênfase curricular.

O *conhecimento do conteúdo pedagógico*, embora incluindo o conhecimento do conteúdo a ensinar, vai além do conteúdo disciplinar em si. Nesta fase, falamos do conhecimento do conteúdo, mas de uma forma especial de conhecimento, que dá corpo aos aspectos do conteúdo mais relevantes para a docência. Dentro da categoria do conhecimento do conteúdo pedagógico, Shulman inclui os tópicos regularmente mais ensinados numa determinada área, as formas mais usuais de representação dessas ideias, as analogias mais profundas, as ilustrações, os exemplos, as explicações e demonstrações – enfim, as formas de representar e formular o conteúdo de modo a torná-lo compreensível aos outros. Uma vez que não há formas singelas de representação mais poderosas, o professor deve munir-se de uma parafernália de formas alternativas de representação, algumas das quais derivam de investigação, enquanto outras têm origem na sabedoria da prática.

O conhecimento do conteúdo pedagógico também inclui uma compreensão sobre o que torna fácil ou difícil a aprendizagem de tópicos específicos: as concepções e as pré-concepções que os estudantes de idades e ambientes diferentes trazem consigo para a aprendizagem dos tópicos e lições mais frequentemente ensinados. Se essas pré-concepções são ideias erradas, o que se verifica tantas vezes, os professores precisam de um conhecimento das estratégias que estejam em melhores condições de ajudar os alunos na reorganização da aprendizagem, porque esses alunos não são recipientes vazios que se devem encher.

Aqui, a investigação sobre o ensino e a aprendizagem coincidem de forma muito próxima. O estudo das ideias/conceitos errados dos alunos que influenciam a sua aprendizagem posterior tem sido um tópico fértil na investigação do conhecimento. Estamos a colecionar um corpo crescente de conhecimento acerca das concepções erradas dos alunos e acerca das condições de instrução necessárias para ultrapassar e transformar essas concepções iniciais. Tal investigação baseada em conhecimento, uma componente fundamental na compreensão do conteúdo pedagógico, deveria ser incluída bem no centro da definição de conhecimento pedagógico necessário aos professores.

O *conhecimento curricular* é representado por um amplo leque de programas, designados para o ensino de disciplinas e tópicos particulares a um dado nível, pela variedade de materiais instrutivos disponíveis em relação a esses programas e pelo conjunto de características que

servem tanto como indicações como de contra-indicações para o uso de currículos particulares ou materiais de programas em circunstâncias particulares.

Para Shulman, o currículo e os seus materiais associados são os materiais curativos da pedagogia, a farmacopeia da qual o professor retira esses utensílios de ensino, que apresentam ou exemplificam um conteúdo especial e remedeiam ou avaliam a adequabilidade dos feitos dos alunos. Como se espera que um médico experiente compreenda todo o leque de tratamentos disponíveis para melhorar um problema de saúde, assim como disponha de toda uma ampla gama de alternativas para as circunstâncias especiais de sensibilidade, custo, interação com outras intervenções, conveniência, segurança ou conforto, da mesma forma, também, devemos esperar que o professor mais experiente possua tal compreensão das alternativas curriculares disponíveis para a instrução.

Para além do conhecimento dos materiais curriculares alternativos para um determinado assunto ou tópico dentro de um nível, Shulman considera ainda dois aspectos adicionais de conhecimento curricular. O primeiro é a familiaridade do professor com os materiais curriculares que os alunos estejam a estudar, ao mesmo tempo, em outras disciplinas – o conhecimento horizontal do currículo, que subjaz à capacidade de um professor relacionar o conteúdo de um determinado tópico ou assunto que está a ser discutido simultaneamente em outras disciplinas. O segundo é a familiaridade com os tópicos e os assuntos que foram, estão a ser e serão discutidos na mesma área disciplinar, durante os anos precedentes e posteriores e os materiais que lhes dão corpo – o conhecimento vertical desse conhecimento curricular.

2.4.2. Estruturação do conhecimento docente

A par desta perspectiva teórica do modo como é alcançado o conhecimento do conteúdo dos professores, Shulman indica que há três formas do conhecimento docente, nas quais podem ser organizados cada um dos domínios gerais de conhecimento previamente apresentados (conteúdo, pedagogia e currículo): 1. o conhecimento proposicional; 2. o conhecimento do caso; e 3. o conhecimento estratégico. A maior parte do que é ensinado aos professores surge na forma de proposições. O conhecimento acumulado da experiência de ensino armazena-se em forma de proposições. Há três tipos de conhecimento proposicional: princípios, que decorrem tipicamente da investigação empírica; máximas, que resultam da experiência prática; e as normas, que derivam do raciocínio moral ou ético.

O conhecimento de casos é um conhecimento de acontecimentos específicos, bem documentados e descritos de uma forma rica. Enquanto os próprios casos são descritos como relatórios de acontecimentos ou sequência de acontecimentos, o conhecimento que eles representam é que os torna casos. Os casos podem ser exemplos de momentos específicos de prática com descrições detalhadas, completos, contextualizados e bem definidos que envolvem pensamentos e sentimentos. Há três tipos de casos: protótipos, que exemplificam os princípios teóricos; precedentes, que captam e comunicam princípios de prática; e parábolas, que transmitem valores ou normas. Um acontecimento pode ser descrito; um caso tem que ser explicado, interpretado, discutido e dissecado.

Por fim, “o ‘saber’ estratégico ou juízo pode simplesmente ser um processo de análise, de comparar e contrastar princípios, casos e as suas implicações para a prática” (Shulman, 1986, p.14). Quando este tipo de conhecimento actua, os resultados são armazenados em termos de uma nova proposição ou um novo caso. Estes, então, são incluídos no manancial de casos e princípios a serem usados como quaisquer outros. Nesse sentido, é possível que a análise estratégica ocorra na presença de outras formas de conhecimento e constitui o meio indispensável de testar, estender e melhorá-los.

Outra proposta no que concerne “à estruturação do conhecimento” (Santos, 2000, p. 28) é apresentada por Elbaz (1983), considerando três níveis: as regras, que assentam na experiência; os princípios, asserções mais abstractas ou teóricas que orientam e dirigem a prática; e as imagens, conhecimento mais geral e implícito. Para esta autora, o conhecimento é prático, integrador de saberes teóricos, do conteúdo, pessoais e, sobretudo, dos que emergem da sua acção pedagógica no dia-a-dia.

Santos (2000), citando Leinhardt e Greeno (1986), explica que estes autores advogam que o conhecimento dos professores de Matemática

se estrutura através de conjuntos inter-relacionados de acções organizadas, denominados por esquemas (*schemata*). Estes esquemas incluem as rotinas, os esquemas de informação e a agenda. As rotinas são repertórios de actividades que frequentemente são utilizados. (...) Os esquemas de informação resultam de registos que o professor vai realizando, para utilizar quando é oportuno. Por último, a agenda é um plano mental (...) que contém os objectivos e as acções para a aula. (p. 30)

Assim, o conhecimento profissional é lato e abrange diversos saberes, ligados essencialmente à prática lectiva dos professores e ao trabalho desenvolvido com os alunos na sala de aula (Elbaz, 1983; Ponte & Santos, 1998; Schön, 1987; Santos, 2000; Varandas, 2000);

e sendo gerido pelas características pessoais e contextuais de cada um, ele é resultado de uma construção pessoal (Alarcão, 1996). O conhecimento do professor tem uma essência experiencial e implícita e, deste modo, não poderá ser considerado, em qualquer momento, como previamente adquirido, pois ele tem um carácter dinâmico, elabora-se e reelabora-se sucessivamente ao longo de uma análise sustentada por apropriações prévias profundas, perante situações concretas de ensino com que o professor se confronta diariamente. Cabe assim ao professor potenciar o crescimento e a construção de conhecimentos de natureza variada, um saber agregador sobre o ensino que realiza, canalizando para estas situações todo o manancial que desenvolveu até ao momento. E na apropriação e transformação que realiza, integra o novo no que já possui, fazendo deste modo uma aprendizagem significativa, à semelhança dos alunos.

Só o conhecimento garante a liberdade, a flexibilidade para julgar, para ponderar alternativas, para raciocinar acerca de meios e fins, e depois para agir, enquanto se reflecte sobre as suas acções. O conhecimento garante somente uma imprevisibilidade fundamentada, o exercício do julgamento reflectido, mais do que a exposição de um comportamento correcto (Shulman, 1986).

2.4.3. A formação em didáctica

No âmbito do profissionalismo docente, importa, também, centrar a atenção na formação didáctica.

Há um século atrás, a característica que definia o sucesso pedagógico de um professor era o conhecimento do conteúdo. A identificação da competência para ensinar com base na pedagogia não era um lugar-comum. Hoje, considera-se uma distinção clara entre conhecimento e pedagogia, constituindo um desenvolvimento recente, a par da investigação acerca do desenvolvimento profissional do professor.

Surgem, então, algumas inquietações que urge desvendar, entre outras, a saber: em que se fundamenta o modo como o professor transmite determinado conhecimento? Em função das características dos alunos ou das suas próprias características? Que formação didáctica o docente detém e como a obteve?

Ponte (1999) “valoriza a formação didáctica que apoia o ensino de saberes específicos” (p. 59) pelos professores, não descurando, claro, as outras vertentes de formação. Shulman (1986) chama a atenção para a necessidade que o professor tem de conhecer bem os conteúdos que ensina. Para Ponte (1999), “o professor não tem de conhecer estes conteúdos

do mesmo modo que o cientista, mas de um modo diferente. Muito em especial tem de conhecer as boas maneiras de os tornar compreensíveis e relevantes para os alunos” (p. 61).

Da revisão de literatura, infere-se que as didácticas específicas evoluíram a par do desenvolvimento tecnológico e científico. Ponte (2003) considera quatro paradigmas nessa evolução. Inicialmente eram definidas como um conjunto de métodos e técnicas específicas de cada disciplina, assumindo-se, deste modo, como um “saber prático”. Depois passou a ser um “saber académico”, “um saber de cunho marcadamente histórico e filosófico” (p. 1415). Posteriormente, “as didácticas surgem como um campo de investigação empírica”, onde se procura estudar os problemas do ensino e da aprendizagem. Actualmente, caminha-se para o “paradigma da colaboração”, considerando agregados a este os paradigmas anteriores. Para este autor, o desenvolvimento de projectos de colaboração para a realização de estudos e intervenções, envolvendo professores e investigadores do campo da didáctica de distintas áreas disciplinares, ocorre num contexto de mudança. Assim, “podemos esperar a emergência de novos entendimentos e novas perspectivas, bem como de novas fórmulas práticas potenciadoras da transformação e da mudança dos sistemas educativos” (p. 1417).

A vasta literatura de investigação sobre o ensino é parca ou inexistente nas respostas às interrogações atrás apresentadas, ficando claro que questões, consideradas como centrais, não são respondidas. Deste modo, está aberta uma área em que esta investigação poderá dar algum contributo.

Shulman (1986) sustenta que, na dicotomia conhecimento/pedagogia, a ênfase recai sobre o modo como os professores gerem as suas salas de aula, organizam actividades, distribuem o tempo, estruturam os trabalhos/tarefas, elogiam ou repreendem, formulam os níveis de perguntas, planeiam lições e julgam a compreensão geral do aluno. Para este autor, importa pesquisar também as questões sobre o conteúdo das lições ministradas, as perguntas feitas e as explicações que se fornecem. Na perspectiva do desenvolvimento do professor e da formação de professores surge, então, uma série de perguntas que contribuem para a investigação. De onde vêm as explicações do professor? Como é que os professores decidem o que devem ensinar, como o representam, como questionar os alunos sobre isso e como lidar com problemas de não compreensão?

Nos anos recentes, a psicologia cognitiva da aprendizagem focou-se quase exclusivamente sobre tais questões, mas estritamente do ponto de vista dos aprendentes. A investigação sobre o ensino tem ignorado as questões que dizem respeito aos professores. E nesta vertente da

cognição docente mais questões poderão ser levantadas: Quais são as fontes/origens do conhecimento do professor? O que é que o professor sabe e como é que ele veio a saber isso? Como adquire novo conhecimento, como armazena o antigo e como é que ambos se combinam para formarem uma nova base de conhecimento? Como é que o professor se prepara para ensinar algo nunca aprendido anteriormente? Como ocorre esta aprendizagem para o ensino? Também quando o manual escolar se mostra inadequado, incompleto, etc., como é que estas deficiências são apreendidas pelos professores e como lidam com elas? Como é que os professores usam um texto e transformam o seu conhecimento em instruções que os alunos possam compreender?

No âmbito da profissão docente, outra área passível de exploração é a do ingresso na carreira, particularmente a de como é que se faz a transição de estudante especializado a professor. Nomeadamente, como é que um aluno, bem sucedido nos seus estudos, transforma o seu conhecimento em conteúdo que os alunos compreendam? Quando este professor se confronta com livros, com capítulos incompletos ou com falhas, ou com alunos completamente “perdidos”, como é que ele emprega o domínio do conhecimento para gerar novas explicações, representações e clarificações? Quais são as origens das analogias, das metáforas, dos exemplos e das demonstrações?

Interessa saber, também, como é que o professor, em início de carreira experiente, retira conhecimento do processo de ensino e que consequências resultam quando a competência do conteúdo é comprometida por deficiências de conhecimentos ou competências anteriores.

Para Shulman (1986), apenas ter conhecimento do conteúdo é insuficiente para ensinar, sendo necessário também o conhecimento pedagógico. Combinar, de forma apropriada, estas duas vertentes do conhecimento de um professor requer que se preste tanta atenção aos aspectos do conteúdo como aos elementos do processo de ensino, a que recentemente a investigação se tem devotado.

Na persecução de ser claramente partilhado com os seus alunos, evoluindo sempre nesse sentido, o conhecimento do professor integra competências pedagógicas que vai desenvolvendo, ao longo da sua experiência, para constantemente aplicar a outros conteúdos que pretenda leccionar. Sendo assim, poderemos caracterizar o conhecimento didáctico como sendo um conhecimento transversal a todos os conteúdos específicos da disciplina, intrínseco e que se alimenta da acção, da investigação, da reflexão constante sobre a acção (Schön, 1987) e da sua problematização. Ao investigar, o professor apropria-se de teorias que lhes permitem contornar

problemas da sua prática, incitando, desta forma, a possibilidade de mudança e transformação. Porém, sem motivação, envolvimento e empenho é difícil imaginar qualquer transformação significativa.

Por vezes, o professor não consegue comunicar de forma explícita o seu conhecimento na interacção com os seus alunos nos vários contextos que emergem durante a acção, manifestando-se na actuação espontânea e sendo indispensável para um bom desempenho. Supõe-se que qualquer actividade de ensino-aprendizagem seja impregnada de esquemas de representações adequados às ideias e significativos para os alunos, de modo a instigar o professor numa *reflexão na acção* – reflectir no momento de ensino, reorganizando-o se for necessário (Schön, 1987, 1992) –, culminando numa aprendizagem com compreensão dos seus alunos. Por sua vez, através da *reflexão sobre a acção* e da *reflexão sobre a reflexão na acção* – através do distanciamento da acção que permite reflectir sobre o que se passou, fazer uma análise crítica sobre a *reflexão na acção e sobre o conhecimento na acção* (Schön, 1992) – o professor envolve-se no processo de construção dos saberes desencadeados na própria docência, às custas do *conhecimento na acção* – resultante da prática lectiva e de reflexões anteriores, que conduz toda a actuação do professor, e que se sustenta na recolha sistemática de informação, dando significado à teoria (Alarcão, 1996; Elbaz, 1983; Martins & Santos, 2008). Por exemplo, quando se implementam tarefas inovadoras, estas exigem a “construção pessoal de novos princípios e rotinas que os apoiem [aos professores] na exploração dessas tarefas e da actividade delas decorrentes” (Ponte, Oliveira, Brunheira, Varandas & Ferreira 1999, p. 46). Também Almeida e Martinho (2003) sustentam que, “perante situações novas, vários esquemas [mentais] convivem acabando por combinar-se e dando origem a uma acomodação e, conseqüentemente, a uma reestruturação do esquema prévio. É assim que um indivíduo pode (...) resolver novas situações” (p. 511) e aumentar o seu manancial de conhecimentos.

O conhecimento é desta forma aplicado às situações de ensino que o professor desenvolve, favorecendo estes contextos a construção de novos saberes. “O próprio conhecimento da disciplina, adquirido de forma teórica, é desenvolvido e refinado durante as experiências de ensino” (Varandas, 2000, p. 49). Assim sendo, a elaboração de um novo plano de aula apresenta-se mais consciente e coerente com a aprendizagem dos alunos. Todo o professor é, além de detentor do conhecimento específico do conteúdo da sua disciplina, um construtor de situações de aprendizagem. Ponte e Santos (1998) advogam que, ligado à prática pedagógica do professor, se destacam “quatro domínios, que constituem o núcleo do

conhecimento profissional” (p. 4), a que Varandas (2000) denomina como sendo o conhecimento didáctico (quadro 6).

Quadro 6 – As quatro dimensões do conhecimento didáctico

Conhecimento do conteúdo	<ul style="list-style-type: none"> • Domínio do conteúdo: a importância de dominar os conteúdos que se ensinam é há muito reconhecida e imprescindível para um bom desempenho profissional (Shulman, 1986). • Visão que se tem sobre a natureza e a estrutura do conteúdo: as concepções sobre o conteúdo a leccionar que os professores vão formando ao longo dos anos de serviço. Ponte e Santos (1998) sustentam que, “na prática, os professores concentram a sua atenção sobretudo nos aspectos procedimentais da disciplina e no conhecimento de terminologia; ao mesmo tempo, dão pouca importância aos processos de raciocínio e à validação das ideias matemáticas” (p. 5).
Conhecimento do currículo	<p>Neste domínio inclui-se o conhecimento dos objectivos e métodos, da articulação dos conteúdos elencados no programa oficial da disciplina e dos materiais e recursos a partir dos quais se seleccionam as tarefas a propor aos alunos.</p> <ul style="list-style-type: none"> • Recursos: todos os recursos ao alcance dos professores no sentido de motivar os alunos para a aprendizagem, entre os quais se incluem os recursos tecnológicos, computadores e máquina de calcular, retroprojector e transparências, DVDs e filmes, os materiais físicos e manipuláveis, o manual escolar que, para muitos professores, é imprescindível na planificação das suas aulas, considerado por Ponte e Santos (1998) como a “principal fonte de organização das aulas” (p. 6), entre outros. • Tarefas: abertas (investigações e exploratórias) ou fechadas (problemas e exercícios). Tipos de tarefas de acordo com o seu grau de abertura e de desafio (reduzido e elevado) (Ponte, 2005). • Objectivos: finalidades contempladas no programa oficial da disciplina, que funcionam como orientações para a acção dos professores ao longo do ano lectivo, bem como os diversos objectivos curriculares transversais, como o desenvolvimento do espírito crítico, da responsabilidade, autonomia, entre outros (Ponte, 2005). • Gestão do tempo de leccionação: número de horas atribuídas para a leccionação de cada conteúdo.
Conhecimento sobre a aprendizagem (Varandas, 2000; Santos, 2000)	<ul style="list-style-type: none"> • Processos cognitivos: conhecimento que o professor possui sobre as capacidades dos seus alunos e como estes aprendem. • Interesses e expectativas dos alunos: adaptar a tarefa aos interesses dos alunos; este conhecimento inclui a percepção de diferentes processos de aprendizagem, interesses, expectativas, necessidades dos alunos e as formas de os alunos se relacionarem na sala de aula. <p>É comum dizer-se que o aluno aprende ouvindo o professor e resolvendo exercícios, ideia que resulta da concepção que o professor tem sobre o conteúdo, como um corpo de saberes compartimentado e estruturado.</p>
Conhecimento instrucional	<p>Saberes provenientes da prática e que orientam toda a actividade profissional do professor. É a partir dele que cada professor organiza as tarefas de acordo com os objectivos que se propõe alcançar e determina procedimentos de acção para cada tipo de situação emergente da sua prática. A tensão criada entre as diversas representações que o professor canaliza para ensinar o conteúdo aos seus alunos e os objectivos que se propõe atingir constitui o desafio constante que se coloca ao docente.</p> <p>Numa aula, os acontecimentos realizam-se uns atrás dos outros, sendo o seu</p>

	<p>desenrolar pouco preciso, não obedecendo a uma estrutura rígida, visto a qualquer momento ser sujeita a alterações desencadeadas pelos alunos. Cabe ao professor desenvolver um discurso que sustente a ligação entre todos os acontecimentos, pois os alunos têm de relacionar ideias numa variedade de contextos. “Haverá casos em que os alunos dispõem de um certo protagonismo e outros em que o papel decisivo cabe por inteiro ao professor” (Ponte & Santos, 1998, p. 7).</p> <p>Neste domínio de conhecimento, podemos considerar as seguintes subcategorias:</p> <ul style="list-style-type: none"> • Preparação das aulas: planificação das aulas que constituem um conjunto de intenções que podem ou não ser exequíveis. • Gestão das aulas: actividade que o professor desenvolve na sala de aula. A separação entre parte teórica e parte prática está associada à concepção do conteúdo como “produto acabado” (Ponte & Santos, 1998, p. 5) • Formas de trabalho dos alunos: individualmente, em pares, em pequeno grupo e grande grupo. • Avaliação: considerar os diferentes instrumentos de avaliação (testes, portefólios, composições, relatórios, entre outros).
--	---

Com vista a melhorar o processo de ensino-aprendizagem, os professores devem reflectir sobre os programas da disciplina e sobre as suas práticas lectivas, pois a reflexão, num contexto de trabalho colaborativo, afigura-se como uma actividade propícia para o professor enfrentar situações novas (Martins & Santos, 2008), permitindo-lhe desencadear um processo de criação e aplicação de conhecimentos na sua relação com a realidade escolar.

No nosso estudo, tendo por base o referencial teórico apresentado (Ponte & Santos, 1998), recorreremos às quatro dimensões do conhecimento didáctico referidas para analisar o impacto do trabalho colaborativo sobre o desenvolvimento do conhecimento didáctico das duas professoras participantes no estudo.

2.5. O trabalho colaborativo

Shulman (1993) realça a importância da aprendizagem em contextos colaborativos com outros profissionais, uma vez que o conhecimento que resulta da experiência é produzido, ainda, de forma muito isolada. De certa forma, todos nós, no nosso dia-a-dia, sentimos o quanto é insuficiente o espírito de colaboração e sentido de comunidade profissional dos professores.

A colaboração tem vindo a afirmar-se como uma importante estratégia de trabalho no mundo da educação. Cada vez mais, no sistema educativo, é advogada a colaboração entre professores para a realização de diversas tarefas, como planificações ou projectos de escola. Contudo, na realidade, muitas destas actividades, incluindo as planificações, ainda são feitas de forma individual. Hargreaves (1998) aponta duas explicações para esta forma de trabalho: “no primeiro e mais tradicional, o individualismo é associado à desconfiança, aos comportamentos

defensivos e à ansiedade; o segundo, a defeitos e fracassos dos professores, que seriam, em parte, «naturais» e, em parte, o resultado das incertezas do seu trabalho” (p. 188). Frequentemente, o professor tem medo de ser observado na sua prática lectiva, refugiando-se assim no individualismo.

Além disso, existem condicionalismos de ordem física, nomeadamente a falta de locais onde os professores se possam reunir, além do factor tempo ser determinante na pouca apetência para o trabalho em equipa.

Subjacente ao trabalho colaborativo, Boavida e Ponte (2002) sustentam que tem de existir um objectivo geral comum, partilhado por todos, e, no relacionamento entre os participantes, tem que se verificar um clima de confiança, disponibilidade para ouvir os outros, negociação, diálogo e respeito mútuo.

Na fase inicial do trabalho colaborativo, as pessoas têm que aprender a lidar umas com as outras, conhecendo-se ou não previamente. Os membros da equipa têm que ter a mesma oportunidade de participar e os cargos que ocupam são irrelevantes. Tem que se estabelecer uma relação de trabalho onde impere a confiança e onde reine o diálogo como forma de gerir as diferenças dos participantes.

A colaboração assume-se como um meio ou um processo dinâmico, que comporta procedimentos muitas vezes não previstos ou planificados, com potencialidades para os intervenientes desenvolverem o seu conhecimento didáctico.

Segundo Boavida e Ponte (2002), um grupo de trabalho que se constitui para desenvolver uma investigação parte da iniciativa de uma ou mais pessoas. No projecto de investigação que se pretende levar a cabo, a iniciativa partirá do investigador, que apresentará a ideia base e um plano geral de trabalho, distribuindo os papéis desempenhados por cada parceiro colaborante, de uma forma aberta e negociável. Neste processo de negociação, é fundamental, à partida, apresentar as vantagens que emergirão do envolvimento de cada um, nomeadamente a oportunidade de desenvolver aprendizagens comuns e individuais.

A equipa que se formou foi constituída por elementos com diferentes experiências, concepções e expectativas “de modo a possibilitar olhares múltiplos sobre uma mesma realidade, contribuindo, assim, para esboçar quadros interpretativos mais abrangentes para essa mesma realidade” (Boavida & Ponte, 2002, p. 46).

O trabalho colaborativo de equipa, que se implementou, envolveu o desenvolvimento de instrumentos e métodos de ensino, a planificação e calendarização das actividades a

desenvolver, bem como a discussão e reflexão sobre as actividades realizadas na sala de aula. Para além destas actividades, em que intervieram todos os elementos da equipa, realizou-se uma divisão de tarefas tirando partido da experiência, interesses e possibilidades dos diversos membros.

A colaboração entre professores pode assumir formas muito diversas. Termos como colaboração e cooperação são muitas vezes entendidas como sinónimos, mas apresentam distinções a considerar. Com efeito, e segundo Day, citado por Boavida e Ponte (2002), “enquanto que na cooperação as relações de poder e os papéis dos participantes no trabalho cooperativo não são questionados, a colaboração envolve negociação cuidada, tomada conjunta de decisões, comunicação efectiva e aprendizagem mútua” (p. 4). A colaboração pode ser vista como uma forma particular da cooperação (Boavida & Ponte, 2002).

Assim sendo, enquanto a cooperação é controlada por alguém, existe uma hierarquia a respeitar, na colaboração a autoridade é transferida para a equipa de trabalho, não existindo desta forma um relacionamento de submissão entre os indivíduos (Ferreira, 2006). O grupo que se formou teve como objectivo comum querer aprender para fazer melhor, explorar e questionar as suas práticas, aprendendo a partir dos saberes e práticas dos outros, onde não entrou a competitividade, partilhando deste modo experiências, numa tentativa de superar conjuntamente as dificuldades encontradas.

Hargreaves (1988) refere-se às potencialidades das relações colaborativas e colegiais como estratégia de desenvolvimento profissional dos professores, distinguindo a colegialidade artificial da cultura de colaboração (quadro 7).

Quadro 7 – Tipos de trabalho de equipa considerados por Hargreaves (1998)

Colegialidade artificial	Cultura de colaboração
Regulada administrativamente, pois não é um trabalho em que os seus intervenientes se juntam espontaneamente, mas trata-se de uma imposição superior.	Espontânea, partindo da vontade do grupo docente enquanto grupo social;
Compulsiva, pois este tipo de trabalho é obrigatório.	Voluntária, pois os elementos não são obrigados a integrar-se neste tipo de trabalho fazem-no porque reconhecem que vale a pena.
Orientada para a implementação, porque os seus elementos são persuadidos a trabalharem em conjunto para a implementação de algo que foi pensado e decidido superiormente, como a aplicação de um currículo nacional.	Orientada para o desenvolvimento, pois as finalidades do trabalho e as tarefas a ser implementadas são definidas em conjunto.
Fixa no tempo e no espaço, pois tem um prazo para	Difundida no espaço e no tempo, uma vez que não

terminar as tarefas e um local próprio para a realização deste trabalho em equipa definidos superiormente.	se trata de uma actividade calendarizada e regulamentada administrativamente, desenvolve-se de acordo com a vontade dos elementos da equipa.
Previsível, pois supõe-se que sejam produzidos certos resultados.	Imprevisível, dada a dificuldade de prever os resultados de um grupo de trabalho, visto que os seus elementos se encontram enquanto tiverem interesses comuns e conseguirem produzir ferramentas/instrumentos para interpretar e analisar as situações profissionais em que actuam, e para tomar decisões que lhes permitam enriquecer a sua formação.

A colegialidade artificial “substitui as formas espontâneas, imprevisíveis e difíceis de controlar da colaboração que é gerada pelos professores por formas de colaboração que são, pelo contrário, controladas, contidas e inventadas pelos administradores” (Hargreaves, 1998, p. 220).

Fullan e Hargreaves (2001) ressaltam que a colaboração muitas vezes se restringe a um número limitado de pessoas, a um departamento, um grupo de professores que leccionam o mesmo nível, por vezes o mesmo ciclo, não se alargando a toda a escola ou mesmo a outras instituições escolares, e Santos (2000) acrescenta a “tendência de interacção entre os professores do grupo que leccionam o mesmo ano de escolaridade” (p. 686).

Seguidamente, no quadro 8, apresentam-se as três formas de colaboração propostas por Fullan e Hargreaves (2001).

Quadro 8 – As três formas de colaboração apresentadas por Fullan e Hargreaves (2001)

A Balcanização	“Os docentes depositam a sua lealdade e identidade em grupos particulares de colegas” (Fullan & Hargreaves, 2001, p. 95). Verifica-se em muitas escolas do ensino secundário, onde os professores se juntam em equipas de trabalho por ano escolar e, por vezes, por ciclos. O tipo de trabalho desenvolvido visa apenas interesses da equipa, correspondendo assim a um “isolamento dos professores nos diferentes níveis de ensino” (Fullan & Hargreaves, 2001, p. 97), o que pode pôr em causa a coordenação e a análise vertical do currículo e provocar lacunas na aprendizagem dos alunos, quando transitam de ano. De salientar que o desenvolvimento do conhecimento do professor é concomitante com o desenvolvimento do currículo.
Colaboração confortável	Caracteriza-se por ser “circunscrita no sentido em que não se estende aos contextos de sala de aula” (Fullan & Hargreaves, 2001, p. 99). Desenvolve-se a partir de trocas de materiais, de partilhas de opiniões e de experiências. É uma prática cómoda, onde o conflito e o debate crítico de opiniões diferentes sobre assuntos relacionados com a prática pode não ocorrer, nomeadamente a ocorrência de inovações a concretizar.
Colegialidade artificial	A “imprevisibilidade das culturas colaborativas também pode fazer com que

	os administradores se aproximem de formas de colegialidade que possam controlar, regular ou amestrar” (Fullan & Hargreaves, 2001, p.103). Por exemplo, as reuniões programadas, a planificação feita por um grupo, entre outras.
--	--

Segundo estes autores, para que se verifique um verdadeiro trabalho em colaboração, para além de se constituírem ligações de apoio mútuo entre os docentes, têm que ser analisadas “criticamente as práticas existentes, procurando melhores alternativas e trabalhando em conjunto, arduamente, para introduzir alterações e avaliar o seu valor” (Fullan & Hargreaves, 2001, p. 102), permitindo aos professores sustentar e enfrentar as situações imprevisíveis e incertas da sua profissão de forma mais confortável, culminando no sucesso dos alunos.

Para Little(1990) existem as quatro formas de colaboração descritas no quadro 9.

Quadro 9 – Formas de colaboração profissional entre professores segundo Little (1990)

Narrar e procurar ideias	Cada professor preserva a sua individualidade, trocando esporadicamente materiais didácticos, não se expondo aos outros, ou seja, assume uma cultura de colaboração de individualismo conservadora.
A ajuda e apoio	É talvez aquela que os professores mais esperam do outro colega – ajuda na resolução de problemas e dificuldades com que se deparam. Normalmente, existe sempre um professor mais experiente do que outro no grupo, e é a esse professor experiente que o colega poderá solicitar ajuda e apoio, a qual pode ser “encarada como uma admissão da própria incompetência” (Lima, 2002, p. 53). Esta forma de colaboração integra, de igual modo, uma postura de um certo individualismo por parte do professor.
Partilha	Corresponde a um intercâmbio de materiais, métodos e trocas de ideias e opiniões. Esta representa uma concepção de colaboração menos privada e mais partilhada e vem estabelecer uma ruptura com a cultura de ensino chamada "tradicional". O facto de o professor sentir confiança suficiente para se expor fomenta um caminho rico de potencialidades para o seu desenvolvimento. No entanto, a partilha do trabalho que se desenvolve pode ser restrita, evidenciando ao outro apenas o que lhe convém (Lima, 2002).
Trabalho em co-propriedade	Encontros entre professores "firmados na responsabilidade partilhada para o trabalho de ensinar (interdependência), na ideia de uma <i>autonomia colectiva</i> , no apoio às iniciativas e liderança dos professores no que respeita à prática profissional e na afiliação ao grupo, fundadas no trabalho profissional" (Little, p. 519). A autora completa esta ideia argumentando que aquilo a que chama autonomia colectiva "não implica consenso de pensamento ou uniformização da acção" (p. 521). A existência de opiniões e concepções diferentes respeitam-se e complementam-se. Para Little “esta é a única forma de colegialidade verdadeiramente consequente no ensino” (Lima, 2002, p.53).

Através das várias formas de colaboração entre professores, podemos então distinguir entre narrar e procurar ideias, ajuda e apoio, partilha e trabalho em co-propriedade (Little, 1990), sendo que da primeira para a última se observa interdependência crescente entre os participantes, que se traduz na definição de objectivos mais claros de trabalho comum, mais exigente e mais prolongado no tempo. Para Lima (2002), estas quatro formas de colegialidade distinguem-se pela “frequência e intensidade da interacção que promovem, assim como nas perspectivas de conflito que criam e nas probabilidades de influência mútua a que dão lugar” (p. 53). No entanto, é notável a sua susceptibilidade à promoção do desenvolvimento profissional.

Para que a implementação do trabalho colaborativo tenha sucesso, é necessário ultrapassar quatro situações de dificuldades com as quais se pode deparar no desenvolvimento do trabalho em equipa (Boavida & Ponte, 2002).

Quadro 10 – Dificuldades inerentes ao trabalho colaborativo

Imprevisibilidade	Esta forma de trabalho não pode ser planificada ao pormenor: necessita de ser renegociada a qualquer momento, pois é um processo revestido de dinamismo e criatividade. Esta renegociação pode alterar os papéis inicialmente previstos; no entanto, supõe-se que os participantes não se vão sentir em desvantagem com os novos papéis.
Gestão das diferenças	Os métodos de trabalho e as expectativas de cada interveniente são diferentes. Estas diferenças devem ser geridas e ultrapassadas pelo grupo através de uma negociação eficaz. E utilizando o diálogo como instrumento de confronto de ideias, fortalecem-se as relações de confiança.
Contrariar a desigualdade entre os custos e os benefícios	Se o envolvimento dos intervenientes não corresponder às metas a que se propõem, os intervenientes poderão abandonar esta forma de trabalho, ou seja, para que o processo seja satisfatório, é necessário contrariar a desigualdade entre os custos e os benefícios.
Conformismo	O grupo de trabalho tem que estar atento, pois estas situações podem colocar em risco o sucesso de todo o trabalho e são susceptíveis de serem ultrapassadas em conjunto.

Estas dificuldades inerentes ao trabalho colaborativo poderão ser solucionadas com uma negociação cuidada, que “permeia o projecto do princípio ao fim, sendo fundamental nos inevitáveis momentos de crise” (Boavida & Ponte, 2002, p. 49). Através do diálogo contínuo e das relações de confiança que se vão desenvolvendo ao longo do tempo, favorece-se a auto-confiança de todos.

CAPÍTULO 3

METODOLOGIA DA INVESTIGAÇÃO

Através da realização de um projecto de investigação-acção desenvolvido no tema de Análise Combinatória, nesta investigação, estudou-se de que modo uma experiência de trabalho colaborativo, envolvendo uma equipa formada por duas professoras e a investigadora, contribuiu para o desenvolvimento do conhecimento didáctico das professoras. Para tal, partindo das potencialidades das estratégias espontâneas dos alunos sobre as operações combinatórias, pretendemos evidenciar o impacto do trabalho colaborativo sobre o ensino ministrado pelas duas professoras, que leccionaram em realidades díspares e com intenções e concepções sobre o ensino também diferentes.

Este capítulo organiza-se em quatro secções, onde se apresentam as opções metodológicas que delimitam e orientam o conjunto de métodos e de técnicas usadas no estudo, os participantes, os métodos de recolha de dados e os respectivos instrumentos e, por último, os procedimentos adoptados para a análise dos dados recolhidos no trabalho empírico.

3.1. Opções metodológicas

A investigação-acção é uma estratégia que faz uso da investigação qualitativa, que segundo Bogdan e Biklen (1994) é um

termo genérico que agrupa diversas estratégias de investigação e que partilham determinadas características. Os dados recolhidos são designados por qualitativos, o que significa ricos em pormenores descritivos relativamente a pessoas, locais e conversas (...). As questões a investigar (...) [são] formuladas com o objectivo de investigar os fenómenos em toda a sua complexidade. (p. 16)

Os mesmos autores sustentam que a abordagem qualitativa é “uma metodologia de investigação que enfatiza a descrição, a indução, a teoria fundamentada e o estudo das percepções pessoais” (p. 11).

Os dados ligam-nos ao mundo empírico e quando sistemática e rigorosamente recolhidos ligam a investigação qualitativa a outras formas de ciência. Os dados incluem os elementos necessários para pensar de forma adequada e profunda acerca dos aspectos da vida que pretendemos explorar. (Bogdan & Biklen, 1994, p. 149)

Ora, como este estudo assenta na interacção humana, optou-se pela utilização de uma metodologia qualitativa, por ser considerada a mais adequada para a realização de estudos sobre educação, pois os investigadores qualitativos pretendem “melhor compreender o comportamento e experiência humanos” (Bogdan & Biklen, 1994, p. 70).

No quadro da investigação qualitativa em educação, onde são estudadas diversas variáveis tal como o comportamento, o investigador não controla o meio nem o fenómeno (Yin, 2005), antes o observa, descreve, interpreta e analisa. Nesta investigação estudaram-se aspectos particulares da evolução de professoras de Matemática, no que concerne às suas concepções sobre a Combinatória e ao seu desempenho na sua leccionação, numa perspectiva de promoção do seu desenvolvimento profissional em termos de conhecimento didáctico e através da implementação de uma estratégia de trabalho colaborativo.

Ao investigar em que medida um projecto de investigação-acção, realizado por duas professores e pela investigadora, pode contribuir para o desenvolvimento do conhecimento didáctico em Combinatória não se pretendeu generalizar os resultados obtidos (Yin, 2005), mas, apenas, analisar e compreender, num contexto particular, o alcance de uma certa prática. Para tal, neste projecto foram realizados trabalhos de intervenção (Ponte, 1994) em conjunto, problematizando-se constantemente a prática, tomando-se consciência de certas limitações que instigaram as participantes na melhoria da sua acção futura.

Em termos de desenho de investigação, o “estudo de caso” é uma das várias abordagens à investigação qualitativa e é a mais usada em educação (Bogdan & Biklen, 1994; Gal, Borg & Gall, 1996; Patton, 1987; Ponte, 1994; Santos, 2000; Yin, 2005). Ao incorporar trabalho de campo, o estudo de caso assume-se como uma investigação empírica (Santos, 2000). Neste estudo usámos esta metodologia, em que se salientam cinco características (Bogdan & Biklen, 1994):

- a) o ambiente natural constituiu a fonte directa de dados, sendo o investigador o principal instrumento da sua recolha;
- b) os dados recolhidos foram do tipo descritivo;
- c) os processos foram o foco de atenção do investigador;
- d) a análise dos dados foi indutiva; e
- e) as perspectivas dos participantes foram especialmente tidas em conta.

A partir dos objectivos do estudo delimitou-se a informação a recolher, pois considera-se extremamente difícil conhecer um caso na sua completude e, por outro lado, segundo Gal, Borg

e Gall (1996), “um estudo de caso provavelmente será mais manejável e significativo se nos concentrarmos apenas em poucos aspectos” (p. 544).

Nesta investigação recolheram-se dados sobre as duas professoras, que constituem os dois casos estudados, no sentido de clarificar a problemática definida e tendo em vista obter respostas para as questões de investigação propostas. No processo de implementação do estudo no terreno, a investigadora, interagindo constantemente com as participantes, assumiu um papel de “observadora participante”. A este respeito, Ponte (1994) clarifica que, este tipo de estudos “procura conhecer os processos, dinâmicas e perspectivas dos intervenientes numa dada situação” (p. 6).

A investigação qualitativa envolve a obtenção de dados descritivos, valorizando, por isso, os processos, descrevendo as situações de forma minuciosa no sentido de fazer uma divulgação, e, ainda, usando citações literais dos participantes de modo a garantir rigor no relato dos fenómenos estudados. Neste último caso, “os resultados escritos da investigação contêm citações feitas com base nos dados para ilustrar e substanciar a apresentação” (Bogdan & Biklen, 1994, p. 48). O investigador deve “procurar interpretar e compreender os significados” (Santos, 2000, p. 192) dos fenómenos observados, “controlando as atitudes que o poderão levar a situações favorecedoras de juízos de valor” (Santos, 2000, p. 192). Segundo Gal, Borg e Gall (1996):

Um objectivo dos estudos de caso é desenvolver a compreensão de um fenómeno complexo tal como é experienciado pelos seus participantes. A perspectiva dos participantes é chamada a perspectiva *emic*. Tipicamente, o investigador obtém esta perspectiva através da observação directa dos participantes – algumas vezes chamados *insiders* – quando eles se comportam naturalmente no contexto, e através de conversações informais com eles. (p. 546)

Com o objectivo de validar as diferentes perspectivas das participantes (Bogdan & Biklen, 1994), a investigadora enviou por e-mail as gravações e as transcrições (algumas disponibilizadas também em formato de papel) de todas as sessões e aulas assistidas. Ainda, para conferir as suas interpretações com as perspectivas das participantes, e no sentido de tornar o registo escrito o mais rigoroso possível, a investigadora enviou por e-mail excertos de trabalho escrito desenvolvido para as duas professoras, solicitando-lhes que revissem e modificassem aquilo que não correspondesse às suas perspectivas e pontos de vistas. Procedendo deste modo, a investigadora pretendeu captar o pensamento e a acção das professoras, pois “o processo de condução de investigação qualitativa reflecte uma espécie de

diálogo entre os investigadores e os respectivos sujeitos, dado estes não serem abordados por aqueles de uma forma neutra” (Bogdan & Biklen, 1994, p. 51).

Por outro lado, a relação entre as participantes que se desenvolveu ao longo desta investigação, tendo por objectivo comum melhorar o ensino através da construção de um bom clima de trabalho, permitiu à investigadora compreender de forma mais fiável as situações observadas, tal como são percebidas pelas participantes.

Num processo desta natureza, em que se aprofunda o conhecimento acerca das pessoas e dos contextos, torna-se importante enfatizar a dimensão ética da investigação, sobretudo preservando o anonimato dos sujeitos que participam no estudo. Assim, foi garantido o anonimato das participantes através do estabelecimento de um pseudónimo atribuído a cada uma e escolhido por elas: Maria e Margarida. Os mesmos procedimentos foram seguidos em relação às instituições escolares onde leccionavam, bem como relativamente a todos os alunos que intervêm nas descrições e análises das aulas e das respectivas reflexões.

3.2. Participantes

Tal como foi referido anteriormente, o grupo de trabalho colaborativo era formado por duas professoras e pela investigadora, esta última assumindo o papel de “observadora participante”.

As duas professoras de Matemática que participaram no estudo eram do 3.º ciclo do ensino básico e do ensino secundário, que leccionavam o tema de Análise Combinatória do 12.º ano, no ano lectivo de 2008-2009. Na selecção das professoras, além da sua disponibilidade e interesse para participarem no estudo, procurou-se atender a diferentes experiências de ensino, designadamente no que se refere ao ensino do tema de Análise Combinatória.

As participantes eram duas professoras responsáveis e empenhadas profissionalmente, e ambas consideravam que contextos de trabalho colaborativo são potenciadores de mudanças e aprendizagens, mesmo que lentas. A valorização deste tipo de trabalho vinha do passado, não constituindo, por isso, uma novidade para qualquer delas.

Para além das actividades de planificação e de reflexão sobre a prática pedagógica, realizadas nas sessões de trabalho, as professoras, por sugestão da investigadora, assistiram a algumas aulas uma da outra. Esta proposta foi de imediato acolhida com agrado, pois estas docentes eram incitadas pela curiosidade de encontrar formas alternativas de tarefas a propor aos seus alunos na sala de aula.

A formação académica das professoras era semelhante: ambas tinham uma Licenciatura em Ensino de Matemática, obtida na mesma instituição de ensino superior, e posteriormente, Margarida tinha concluído o mestrado em “Supervisão Pedagógica em Ensino da Matemática” e Maria tinha feito uma pós-graduação em “Tecnologia Educativa”.

Estas docentes leccionavam em escolas situadas em localidades diferentes. As turmas onde decorreu a investigação já eram delas desde o 10.º ano, o que explica a existência de um ambiente de trabalho calmo, agradável, cordial e de empatia e cumplicidade entre os intervenientes. No início do ano lectivo, a turma de Maria era formada por nove alunos, tendo posteriormente, ainda durante a leccionação da Combinatória, aumentado para 15 alunos. A turma de Margarida era constituída por 32 alunos.

À partida, uma vez obtida a autorização formal dos pais dos alunos, tanto Maria como Margarida mostraram disponibilidade para serem observadas, quer pela investigadora quer pela outra colega participante.

Na altura em que decorreu o estudo, como acontecia na generalidade das escolas, as professoras estavam a viver um processo de mudança em resultado da implementação do novo modelo de avaliação de desempenho dos professores e do novo modelo de gestão das escolas. Estas mudanças constituíram um constrangimento para o desenvolvimento deste trabalho, porque elas geravam situações de conflito e de incerteza e estas novas exigências ocupavam muito as professoras, restando-lhes pouco tempo para os trabalhos relativos a este projecto. Mesmo assim, as professoras procuraram conciliar as várias tarefas em que estavam envolvidas, pois são pessoas para quem os compromissos são para cumprir.

Os participantes, numa investigação, devem ser tratados com muito respeito. Ao negociar o consentimento de colaboração num estudo, o investigador deve ser claro e explícito com todos os indivíduos, no que concerne aos termos do acordo. Uma vez estabelecido o acordo, ele deve ser respeitado até à conclusão do estudo e, finalmente, o investigador deve ser autêntico quando escrever os resultados.

Cada participante teve conhecimento prévio dos objectivos do estudo a realizar, bem como do plano de acção traçado e dos papéis a desempenhar por cada uma, oralmente e através de um documento formal (Anexo I), que fazia parte integrante de um dossier entregue na segunda sessão realizada. Este documento assumiu-se como passível de análise crítica e sujeito a alterações, caso as professoras discordassem de algum dos seus considerandos.

3.3. Métodos de recolha de dados

A recolha de dados foi feita entre Setembro e Dezembro de 2008.

Para que um estudo do tipo aqui apresentado possa ser considerado credível “sugere-se desenvolver a triangulação, isto é, a confrontação de informação obtida a partir de fontes distintas” (Santos, 2000, p. 187). Para Yin (2005), “com a triangulação, você também pode se dedicar ao problema em potencial da validade do constructo, uma vez que várias fontes de evidências fornecem essencialmente várias avaliações do mesmo fenómeno” (p. 128), entendendo como construto o que se infere através da observação de um acontecimento (Gall, Borg & Gall, 1996). Nesse sentido, os dados recolhidos, nesta investigação, provieram de vários métodos, que foram utilizados de acordo com a situação específica. Os métodos de recolha de dados utilizados foram então a observação, as entrevistas, as conversas informais e os documentos. Neste último caso incluem-se os questionários ministrados aos alunos no final da leccionação do tema, as notas de campo e os registos escritos produzidos pelas participantes.

No caso do trabalho de campo, foi pedida autorização prévia para a sua realização aos presidentes dos conselhos executivos (Anexo I) de ambas as escolas, e só depois de obtermos o seu consentimento passámos ao pedido formal aos encarregados de educação dos alunos (Anexo I), pedindo-lhes permissão para a gravação em áudio das aulas de Combinatória em que participassem os seus educandos.

A recolha de dados iniciou-se com a realização da primeira entrevista a Margarida, seguindo-se, no mesmo dia, a primeira sessão de planificação, no início do mês de Setembro de 2008, e terminou com a realização da entrevista final a Margarida, no dia 13 do mês de Dezembro. Foi durante o mês de Outubro e Novembro que se procedeu a uma recolha mais intensiva de dados, pois foi por esta altura que foram observadas as aulas ministradas pelas duas participantes nas escolas onde leccionavam. Durante este período de tempo surgiram algumas dificuldades, nomeadamente o atraso que se verificou na leccionação do tema por parte de Margarida em relação à planificação por nós elaborada, e, consequentemente, em relação a Maria. Assim, apenas Margarida pôde observar a concretização do guião, previamente elaborado por nós nas sessões e implementado por Maria, através da sua gravação em áudio e transcrição, antes da administração do mesmo conteúdo às suas turmas. Maria assistiu a três aulas de Margarida, cada uma de 90 minutos, depois de já ter leccionado o respectivo tópico;

donde não teve a oportunidade de assistir à leccionação desses conteúdos antes de ela própria os leccionar.

Também constituiu uma dificuldade o facto de ambas as professoras leccionarem de manhã, sendo difícil encontrar horas disponíveis nos seus horários que permitissem a deslocação de uma para a escola da outra com o intuito de assistir a uma aula. Para ultrapassar tal impedimento, foi necessário que Margarida marcasse com os seus alunos horas para permutar, fora do horário lectivo, e Maria fosse substituída por uma colega do mesmo grupo durante duas aulas de apoio no centro de estudo da sua escola.

Para aceder a uma compreensão profunda dos fenómenos a estudar, quer do ponto das participantes (perspectiva *emic*) quer do ponto de vista da investigadora (perspectiva *etic*), recorreu-se a vários métodos de recolha de dados, já elencados anteriormente, e que se desenvolvem a seguir.

3.3.1. Observação

Segundo Tuckman (2000), “a observação dos participantes é o dispositivo mais utilizado para a recolha de dados” (p. 508), devendo o investigador estar completamente envolvido no campo de acção dos participantes. A observação ocorreu no contexto natural, pois “os investigadores qualitativos assumem que o comportamento humano é significativamente influenciado pelo contexto em que ocorre, deslocando-se, sempre que possível, ao local de estudo” (Bogdan & Biklen, 1994, p. 48).

A investigadora, na interacção que manteve com as participantes, assumiu o papel de “observadora participante”, envolvendo-se nas actividades e dificuldades sentidas, sem nunca descurar o objectivo da investigação. Participou activamente na planificação de toda a acção, nas discussões e reflexões despoletadas a partir da acção, emitindo opiniões, juízos e sentimentos e exibindo uma postura sempre atenta ao discurso das professoras participantes, no sentido de procurar compreender as interpretações que estas faziam sobre episódios que se observavam, analisavam e discutiam.

No estudo, foram observadas aulas leccionadas pelas participantes no tema de Combinatória e todas as sessões de trabalho realizadas. A observação das aulas permitiu registar acontecimentos, comportamentos e atitudes, sem alterar a sua espontaneidade ou influenciar o seu normal e natural desenvolvimento. Para assistir às aulas, a investigadora deslocou-se várias vezes às escolas onde Maria e Margarida trabalhavam, tendo sido observadas

4 aulas a Maria, das quais 2 presenciadas também por Margarida, e 5 a Margarida, tendo assistido Maria a 3 delas. Procurando manter uma presença discreta, a investigadora e a participante assistente sentaram-se em cadeiras no fundo da sala nas aulas de Margarida, visto esta ter muitos alunos, ou ocuparam uma mesa que proporcionava mais comodidade para elaborar as notas de campo. Estas aulas foram gravadas em áudio e posteriormente totalmente transcritas para papel.

As sessões de trabalho ocorreram na escola de Margarida e foram realizadas semanalmente ou, esporadicamente, duas vezes por semana. De todas as sessões foram feitas gravações áudio e transcrições, acompanhadas do registo de notas de campo, e nelas se trataram aspectos de organização da experiência e questões de planificação da prática pedagógica e de reflexão sobre as aulas observadas aulas no âmbito do ensino do tema de Análise Combinatória. Mais especificamente, as actividades que se desenvolveram nas sessões de trabalho compreenderam:

- Adaptação, escolha e discussão de tarefas a implementar;
- Estudo e planificação das aulas a leccionar durante o ensino da Combinatória, tendo-se elaborado um guião para cada aula pouco estruturado, mas orientador da acção;
- Análise e discussão de textos de apoio;
- Reflexão sobre o decorrer da acção com vista a melhorar a prática futura.

A preparação das sessões foi assumida pela investigadora, que estabeleceu para todas elas uma ordem de trabalhos, que era apresentada no final da sessão anterior. Deste modo, todos os intervenientes tinham conhecimento prévio dos assuntos a tratar no próximo encontro. Além disso, para cada sessão, a investigadora entregava um conjunto de documentos em formato de papel e/ou enviados por e-mail com antecedência, concernentes ao assunto a tratar, para que as participantes os pudessem ler e reflectir sobre eles e, finalmente, os arquivassem no dossier que a investigadora entregou a cada uma no início da investigação. Deste dossier fazia parte uma *pen drive*, onde também podiam ser gravadas as fichas de trabalho e os guiões de todas as aulas.

Na primeira sessão de reflexão, a investigadora interveio pouco para permitir às professoras reflectirem sobre as suas práticas de forma natural e espontânea, pois receava que as professoras interpretassem as suas questões sobre aspectos da aula, que lhe pareciam pertinentes, como uma apreciação negativa do que tinha acontecido.

A organização das sessões de reflexão das aulas assistidas obedeceu a um padrão pouco estruturado: em primeiro lugar, tinha a palavra a professora que tinha leccionado, fazendo uma apreciação global da aula, depois falava a professora que assistiu à aula e, no final, a investigadora.

Ao longo da investigação, travaram-se muitas conversas informais, salientando-se que o contacto estabelecido entre a investigadora e as participantes extravasava as questões da escola. No âmbito do projecto mantiveram-se conversas com a investigadora, por vezes através do telefone, acerca das tarefas a implementar e de dificuldades surgidas no desenrolar da acção. Posteriormente, a investigadora levava esta informação para as sessões, onde eram partilhadas e discutidas no sentido de ultrapassar as dificuldades referidas. Estas conversas informais facultaram algumas informações e opiniões que geralmente não eram expressas publicamente.

O foco de observação nas aulas foi essencialmente a forma de concretização das tarefas e a interacção estabelecida entre os alunos e entre os alunos e a professora, caracterizando-se a organização dos alunos e os papéis atribuídos aos alunos e às professoras. Neste âmbito, foram também recolhidos dados através de notas de campo, efectuadas pela investigadora, as quais orientaram o trabalho desenvolvido nas sessões e a análise da informação obtida das transcrições das aulas registadas em áudio. Por outro lado, a informação resultante da observação das aulas permitiu também formular um conjunto de questões que foram incluídas nas últimas entrevistas realizadas.

3.3.2. Entrevistas

Tornou-se indispensável, do ponto de vista metodológico, recorrer à entrevista para se tentar perceber, nos discursos e representações dos professores, o significado das mudanças ocorridas, possibilitando, com maior facilidade, a apreensão da compreensão que os próprios sujeitos fazem acerca dos fenómenos nos quais estão envolvidos e implicados.

As entrevistas são administradas por uma pessoa, o investigador, especialmente no caso das investigações qualitativas, com o objectivo de obter informações sobre uma outra. As entrevistas, segundo Yin (2005), são “uma das mais importantes fontes de informação para um estudo de caso” (p. 116), permitindo-nos ter contacto com os actores sociais. Para Bogdan e Biklen (1994), “a entrevista é utilizada para recolher dados descritivos na linguagem do próprio sujeito, permitindo ao investigador desenvolver intuitivamente uma ideia sobre como os sujeitos interpretam aspectos do mundo” (p.134).

Em investigação, as entrevistas podem ser utilizadas isolada ou conjuntamente com outras técnicas. A entrevista é considerada como o instrumento mais específico e eficaz na obtenção de informações sobre aspectos peculiares não observáveis (Patton, 1987), pois as questões são colocadas directamente ao entrevistado, permitindo ao investigador compreender melhor a perspectiva do outro e obter de imediato explicações mais precisas através do desenvolvimento de um diálogo ameno e agradável. Assim, no presente estudo, para além das questões contempladas no guião da entrevista, no decorrer da conversa foram pedidos esclarecimentos às participantes, que permitiram compreender melhor as respostas dadas e os pensamentos a elas associados.

É de enfatizar que, devido ao facto das participantes possuírem concepções diferentes sobre o processo de ensino-aprendizagem, durante a última entrevista emergiram algumas questões diferentes para cada uma das professoras, que lhes permitiu explicarem verbalmente a valorização de determinados aspectos das suas práticas lectivas. Por exemplo, a investigadora pretendeu conhecer mais profundamente o significado que Maria atribuía à organização dos alunos em grupo, pois esta achava que a estrutura da sua sala, onde as carteiras se encontravam distribuídas em filas horizontais, propiciava naturalmente esse tipo de trabalho.

Segundo Bodgan e Biklen (1994) “as entrevistas qualitativas variam quanto ao grau de estruturação” (p.135), podendo ser estruturadas ou fechadas, semi-estruturadas ou relativamente abertas e não estruturadas ou muito abertas. As entrevistas estruturadas ou fechadas requerem do entrevistado uma resposta objectiva e curta, enquanto as entrevistas abertas ou semi-estruturadas se centram “em tópicos determinados ou podem ser guiadas por questões gerais. Nas entrevistas não estruturadas ou muito abertas “o entrevistador encoraja o sujeito a falar sobre uma área de interesse e, em seguida, explora-a mais aprofundadamente retomando os tópicos e os temas que o respondente iniciou” (p.135).

Nas entrevistas semi-estruturadas começa-se por um conjunto de perguntas relativamente estruturadas e, no final, formulam-se perguntas mais livres, que nos proporcionam o acesso ao interior do mundo individual de cada participante e permitem perceber os diversos entendimentos sobre os fenómenos em estudo. Bodgan e Biklen (1994) antecipam que “nas entrevistas semi-estruturadas fica-se com a certeza de se obter dados comparáveis entre os vários *sujeitos*” (p. 135).

No presente estudo realizaram-se entrevistas individuais, do tipo semi-estruturada, com a duração de cerca de 90 minutos, antes e depois de concluída a leccionação do tema de Análise

Combinatória e as participantes não tiveram conhecimento do teor das questões antes da sua administração. A primeira entrevista foi efectuada antes da leccionação da Combinatória, cerca de um mês antes, e teve como principais objectivos conhecer as perspectivas das participantes sobre a Combinatória e sobre o seu ensino e a sua aprendizagem. A última entrevista foi realizada após os vários momentos de prática e com ela pretendeu-se fazer um balanço da acção desenvolvida e aprofundar algumas questões, no sentido de obter mais informação acerca de aspectos menos elucidados que surgiram no trabalho de campo.

As entrevistas semi-estruturadas foram realizadas segundo um guião orientador, definido previamente em função do referencial teórico que foi construído, e foi considerada alguma flexibilidade na ordem de formulação das questões e na inclusão de novas questões no decorrer da entrevista, no sentido de estabelecer um diálogo que permitisse à investigadora obter o máximo de informação.

O guião da entrevista inicial (Anexo II) constava de um conjunto de questões, trinta e nove, distribuídas em torno de quatro aspectos acerca dos quais quisemos obter informação: percurso pessoal e profissional da professora; prática pedagógica; ensino e aprendizagem da Combinatória; e o trabalho colaborativo. O guião da entrevista final (Anexo II), com trinta e oito questões, organizou-se em torno de dois grandes temas: prática pedagógica e trabalho colaborativo.

A investigadora facultou às participantes a escolha do local onde as entrevistas se realizaram. Considerando a importância da privacidade na condução das entrevistas, Margarida, para a primeira entrevista, escolheu uma sala sossegada da sua escola. Já a segunda entrevista ocorreu em casa da investigadora, visto esta estar impossibilitada de sair por motivos de saúde. Relativamente a Maria, esta marcou a realização das duas entrevistas em sua casa, no final do dia de trabalho.

O registo das entrevistas foi efectuado em áudio, procedendo-se, posteriormente, à sua transcrição para suporte informático e de papel, tendo sido enviado às participantes para uma possível correcção e aperfeiçoamento.

3.3.3. Documentos

Os dados documentais têm a vantagem de permitir a economia de tempo, facultando ao investigador a possibilidade de confirmar o essencial da sua tarefa à análise. Estas fontes

primárias permitem entender alguns aspectos que se mostrem menos claros, para além de retratarem de forma fidedigna o acontecimento vivenciado.

Em termos de registos escritos, nesta investigação, recolheram-se todos os materiais elaborados pelas professoras para a prática lectiva, nomeadamente sugestões de problemas para incluir nas várias fichas de trabalho compiladas pela investigadora, guiões de aulas assistidas que as próprias organizavam em casa e apresentavam nas sessões, no sentido de serem analisados e discutidos. Também foram recolhidos documentos informais escritos pelas participantes durante as sessões de reflexão, onde explicitavam ideias e opiniões sobre problemas e outros assuntos abordados. A investigadora teve também acesso a alguns apontamentos escritos num caderno pelas professoras sobre a reflexão de várias situações de aulas que tinham observado.

No final da leccionação da Combinatória, as participantes ministraram questionários individuais aos seus alunos, no sentido de conhecer a sua opinião acerca do decorrer das aulas implementadas em Combinatória. O questionário (Anexo II) incluía 15 questões, distribuídas por duas partes: uma primeira parte, constituída por 10 questões de resposta fechada e uma segunda parte, composta por 5 questões de resposta aberta. Através da análise e do confronto das respostas dadas pelos alunos, efectuadas numa das sessões de trabalho, as participantes extraíram consequências que suportaram respostas a questões da entrevista final e, mais importante, integraram o seu manancial de conhecimentos emanados da acção.

A recolha de dados feita através dos instrumentos usados na investigação permitiu fazer um cruzamento de informações entre a perspectiva das professoras, apresentada sobretudo nas entrevistas, e a da investigadora, alicerçada especialmente na análise das notas de campo e das transcrições das aulas gravadas e das sessões de trabalho.

3.4. Análise de dados

Depois de recolhidos os dados com os diferentes instrumentos, procedemos ao seu estudo no sentido de responder às questões de investigação (Tuckman, 2000).

O termo *dados* refere-se aos materiais em bruto que os investigadores recolhem do mundo que se encontram a estudar; são os elementos que formam a base da análise. Os dados incluem materiais que os investigadores registam activamente, tais como transcrições de entrevistas e notas de campo referentes a observações participantes. Os dados também incluem aquilo que os outros criaram [registos escritos]. (Bogdan & Biklen, 1994, p. 149)

Segundo os mesmos autores, “o processo de análise dos dados é como um funil, as coisas estão abertas de início (ou no topo) e vão-se tornando mais fechadas e específicas no extremo” (p. 50). Para Yin (2005), “a análise de dados consiste em examinar, categorizar, classificar em tabelas, testar ou, pelo contrário, recombina as evidências (...) para tratar as proposições iniciais de um estudo” (p. 137).

Nesta investigação fez-se uma análise dos dados de forma indutiva, o que “significa que o investigador procura, através dos dados, bocado por bocado, e, depois, infere que certos acontecimentos são instâncias do mesmo tema ou padrão subjacentes. Assim, os temas e padrões são induzidos dos dados” (Gall, Borg & Gall, 1996, p. 11).

Com o objectivo de atribuir significado aos dados recolhidos, a análise das transcrições feitas, das notas de campo e dos registos escritos serviu para clarificar ideias e concepções, sustentar a compreensão das práticas e a sua coerência com os discursos e representações.

Para analisar as aulas, foi aberto espaço de modo que as professoras apresentassem oralmente as suas impressões e reflexões sobre a situação de ensino vivenciada, momento em que discutiram as potencialidades e a pertinência do trabalho colaborativo para o ensino e a aprendizagem de alunos. O objectivo desta concretização foi o de fazer com que os professores reflectissem sobre a sua aula, problematizando episódios aí decorridos, contribuindo para o seu desenvolvimento profissional e para pôr em causa concepções e as práticas lectivas de cada uma.

A análise de dados foi realizada de forma contínua durante o processo de recolha dos dados, através da selecção, da organização, do resumo, da divisão dos dados e da interpretação dos factos, por exemplo, em função de “observações prévias” (Bogdan & Biklen, 1994, p. 210), das sessões, inicialmente, e a partir de certa altura, destas e das aulas. Estes procedimentos forçaram a preparação das sessões seguintes, garantindo a continuidade do estudo.

Numa perspectiva de regulação e aferição das questões de investigação e da problemática, que permitia reflectir sobre os dados que possuíamos e sobre a forma e o rumo que a investigação estava a tomar, foi também imprescindível a ajuda das transcrições das gravações e das notas de campo que acompanharam, a par e passo todo o estudo empírico. É de enfatizar as notas de campo, porque continham informação sobre o que se estava a aprender (Bogdan & Biklen, 1994), possibilitaram assinalar e registar *insights*, comentários particulares, expressões, reacções, atitudes e comportamentos, que foram bastante úteis, pois forneceram pistas de trabalho para desencadear espontaneamente uma análise. Além disso, permitiram, na

fase exploratória desta investigação, descobrir ideias, especular, ordenar, comparar, relacionar, orientar e planear em casa, desenvolvendo materiais e tarefas, bem como questões particulares a propor às participantes nas sessões seguintes, de modo a conduzir e a prosseguir com toda a investigação, nunca descurando os objectivos a que nos propusemos.

Durante ou no final das sessões, a investigadora foi registando sentimentos e pensamentos que surgiram, através das notas de campo. Relativamente a Maria, na observação de cada aula assistida, Bárbara apontava no seu caderno de notas o tipo de questões colocadas, fazendo comentários acerca da orientação que sempre pautou a sua acção, bem como do papel activo que a professora sempre assumiu na gestão de quase todas as tarefas concretizadas. Posteriormente, em casa, na selecção e organização que fazia da informação colhida, através de quadros, registava e sinalizava estes episódios. Foram registadas associações de episódios semelhantes, que ocorreram nas diferentes aulas assistidas, que foram cruzados com as transcrições da aula e que constituíram dados que, no final, integraram textualmente a redacção da investigação e, especificamente, os resultados do trabalho empírico desenvolvido, além de terem suscitado um pensamento e uma análise crítica nas sessões, pois Bárbara e Margarida confrontaram Maria com alguns destes momentos, através das transcrições das aulas.

Relativamente a Margarida, foram usados os mesmos procedimentos e anotados comentários nas notas de Bárbara, por exemplo, sobre atitudes que Margarida apropriou de Maria e que usou como estratégia de intervenção, no sentido de colmatar dificuldades experienciadas e que a impediram de cumprir todo o plano de aula, dificuldade esta que Maria só vivenciou na sua primeira aula assistida. As opiniões dos alunos, manifestadas através das respostas dadas ao inquérito aplicado no final da leccionação da Combinatória, foram de extrema importância, no sentido de conferir consistência às interpretações e inferências feitas pela investigadora acerca da actuação e do discurso de cada participante. Todo este trabalho realizado paralelamente ao estudo empírico sustentou e impulsionou a análise mais sistemática e profunda no final da recolha de dados.

Geralmente, por cada aula assistida que observava, Bárbara fazia um resumo descritivo do seu decurso, cruzando-o com os comentários pessoais que tinha apontado durante a observação e que confrontava com a transcrição, o que constituiu uma valiosa ajuda para a descrição e análise das aulas que integraram cada caso estudado. Deve salientar-se o facto de que a “informação que se obtém através do contacto directo” (Bogdan & Biklen, 1994, pp. 47-48) complementou de forma imprescindível toda a restante informação, recolhida através dos

outros métodos de recolha de dados, e, sustentou toda a compreensão e interpretação que a investigadora foi construindo dos factos observados, pois segundo os mesmos autores: “O entendimento que este [o investigador] tem deles [dos dados constitui] o instrumento-chave de análise” (p. 48).

No tratamento e análise dos dados, adoptámos os procedimentos da “análise de conteúdo”, visando uma triangulação dos dados. Yin (2005) sustenta que “quanto mais proposições específicas um estudo contiver, mais ele permanecerá dentro de limites exequíveis” (p.43), enfatizando a vantagem do desenvolvimento de “linhas convergentes de investigação, um processo de triangulação” (p.126).

A análise de conteúdo efectuada incluiu as entrevistas, a observação e os resultados da pesquisa documental. A análise documental foi importante ao permitir confirmar os outros dados, descobrir novos caminhos, para além de possibilitar triangular as informações que recolhemos através dos outros métodos.

Enquanto processo, à medida que o estudo decorria, a análise de conteúdo teve como intuito a descoberta de ideias e de pistas de trabalho. No caso das entrevistas a “análise de conteúdo” permitiu-nos inferir o seu conteúdo mais profundo e retirar destes documentos a informação pertinente e com significado, de encontro ao propósito da investigação. Esta análise fez surgir, de acordo com a interpretação que lhe conferimos, no final do trabalho de campo, o desenvolvimento de categorias que se sustentaram no referencial teórico desenvolvido e nos vários instrumentos de recolha de dados.

Após a conclusão da recolha de dados aprofundou-se a análise de todos os dados recolhidos, organizou-se de forma sistemática e sintetizada toda a informação. A análise da informação das sessões teve por base as notas de campo, registos escritos e transcrições dos registos áudio, com o objectivo de clarificar e verificar o trabalho desenvolvido, a discussão emergente na preparação da acção do professor, bem como a reflexão que estes fizeram sobre os momentos de pré-acção, acção, e pós-acção.

Neste estudo, a investigadora interpretou os dados e procurou explicar os resultados partindo de trabalhos realizados anteriormente sobre esta temática e em conformidade com todo o referencial teórico elaborado.

Na última fase foram construídos e estruturados os dois casos: Maria, Margarida; obedecendo cada um aos mesmos procedimentos, definindo-se para cada um categorias de análise que “contenham e resumam os dados”(Gall, Borg & Gall, 1996, p. 555) sobre o

conhecimento didáctico das participantes. Estas categorias foram definidas à partida e delineadas a partir do quadro teórico que serviu de base ao estudo. Concretamente, foram usadas as seguintes categorias de análise: conhecimento do conteúdo, conhecimento do currículo, conhecimento sobre a aprendizagem e conhecimento instrucional (Ponte & Santos, 1998; Varandas, 2000).

Com o fim de estruturar os resultados obtidos neste estudo e porque possuíamos material suficiente e já sinalizado e codificado durante a análise feita no decurso do estudo empírico, decidimos discriminar em cada categoria várias subcategorias, nomeadamente: na categoria conhecimento do conteúdo, o domínio do conteúdo e a natureza e a estrutura do conteúdo; na categoria conhecimento do currículo, os recursos, as tarefas, os objectivos e a gestão do tempo de leccionação; no conhecimento sobre a aprendizagem, os processos cognitivos e os interesses e expectativas dos alunos; e, por fim, no domínio do conhecimento, o conhecimento instrucional, a preparação das aulas, a gestão das aulas, as formas de trabalho dos alunos e a avaliação.

Por fim, as conclusões foram elaboradas a par da apresentação dos resultados, de forma desorganizada e fragmentada, e compiladas no final, após ter sido feito um confronto dos resultados com a análise feita *a priori*, como respostas às duas questões de investigação que conduziram todo o estudo.

CAPÍTULO 4

APRESENTAÇÃO DOS RESULTADOS

Neste capítulo apresentam-se os resultados obtidos no estudo, organizados ao longo de três secções. Na primeira secção descrevem-se as sessões de trabalho e de planificação do tema e na segunda e terceira secções faz-se a introdução de cada um dos dois casos estudados, respectivamente, o caso Maria e o caso Margarida.

Cada um dos casos é dissecado ao longo de quatro subsecções: na primeira, é feita a descrição da participante, referindo alguns aspectos relevantes sobre as suas características pessoais e profissionais, bem como a sua relação com a Combinatória; na segunda procede-se à descrição, análise e reflexão dos momentos de prática lectiva, desenvolvendo-se, para cada aula observada, primeiro a sua descrição e análise, e depois a reflexão realizada; na terceira, faz-se uma análise acerca do conhecimento didáctico das participantes, considerando as quatro categorias: conhecimento do conteúdo, conhecimento do currículo, conhecimento sobre a aprendizagem e conhecimento instrucional; e, por fim, na quarta apresentam-se as perspectivas de cada professora em relação ao trabalho colaborativo desenvolvido.

4.1. Descrição das sessões de trabalho e planificação do tema

Na implementação do estudo realizaram-se, ao todo, 14 sessões, com um tempo de duração variável de modo a ir de encontro às disponibilidades dos participantes (ver quadro 11).

Quadro 11 – Assuntos tratados nas sessões

Sessão	Data e duração	Assuntos a tratar
Sessão 1 Planificação	04/09/2008 1h:30m	<ul style="list-style-type: none">• Análise das planificações elaboradas pelo subgrupo de professores que leccionaram o 12.º ano e a investigadora.
Sessão 2 Planificação	09/09/2008 1h:30m	<ul style="list-style-type: none">• Definição da dinâmica do grupo de trabalho e entrega de um <i>dossier</i> a cada participante.• Análise da planificação do tema “Análise combinatória”.• Marcação da hora semanal de cada sessão, tendo em conta o horário de cada participante.• Apresentação da proposta, feita pela investigadora, da implementação de um teste, com o objectivo de se analisarem as estratégias que os alunos usam na resolução de problemas de Combinatória sem instrução.

Sessão 3 Análise e Reflexão	17/09/2008 2h:30m	<ul style="list-style-type: none"> • Entrega de transcrições de entrevistas individuais para posterior leitura e comentários. • Entrega de um extracto da dissertação de mestrado de Correia (2008), seleccionada pela investigadora, para leitura em casa e posterior análise. • Análise e discussão do calendário da observação de aulas. • Discussão acerca da análise e tratamento dos dados recolhidos com a implementação do teste.
Sessão 4 Análise e Reflexão	24/09/2008 1h:00m	<ul style="list-style-type: none"> • Entrega de transcrições de entrevistas individuais para posterior leitura e comentários. • Entrega das fotocópias, a cada participante, do pedido de autorização aos pais para gravação de aulas leccionadas no âmbito do estudo. • Depois de, em casa, as professoras analisarem as estratégias usadas por uma amostra de alunos, tentar compreender e explicar os raciocínios por eles usados. • Entrega de mais dois extractos da dissertação de mestrado de Correia (2008), seleccionados pela investigadora, para leitura em casa.
Sessão 5 Reflexão e Planificação	01/10/2008 2h:30m	<ul style="list-style-type: none"> • Entrega dos documentos: <i>História da Combinatória</i> retirado de Ferreira (2007), grelha de registo de observação em sala de aula (para os alunos), Guião “Dimensões para a reflexão da aula”. • Preparação da primeira aula assistida de Maria. • Apresentação de uma proposta de tarefa de investigação, retirada e adaptada de <i>The Pigeonhole Principle: A Counting Technique for the Middle Grades de Spangler, D. A. (1991)</i>, a propor para a primeira parte da primeira aula de Combinatória, antes do ensino do “princípio fundamental de contagem”. • Continuação do trabalho de reflexão e análise das estratégias usadas pelos alunos, aquando da resolução dos problemas do teste e como ponto de partida para a leccionação das operações combinatórias.
Sessão 6 Reflexão e Planificação	08/10/2008 2h:30m	<ul style="list-style-type: none"> • Entrega de documentos para ler e reflectir sobre a sua pertinência: excertos retirados de <i>Effect of the implicit combinatorial model on combinatorial reasoning in secondary school pupils</i> de Batanero, Navarro-Pelayo & Godino (1997) e <i>A comunicação na sala de aula de Matemática: um projecto colaborativo com três professoras do ensino básico</i> de Martinho (2007). • Continuação da preparação de aulas. Selecção de tarefas a propor a curto prazo.
Sessão 7 Reflexão e Planificação	14/10/2008 2h:30m	<ul style="list-style-type: none"> • Reflexão sobre a primeira aula assistida de Maria. • Planificação dos “arranjos simples” e “permutações”. • Análise do documento: <i>Permutations and Combinations: A problem-solving Approach for Middle School Students</i> de DeGuire L. J. (1991).
Sessão 8 Planificação e reflexão	16/10/2008 2h:30m	<ul style="list-style-type: none"> • Ultimear a preparação das aulas assistidas de Margarida. • Bárbara entregou documentos, para leitura em casa, sobre o modelo implícito dos problemas combinatórios a pedido das participantes na última reunião: excertos do livro <i>Razonamiento Combinatorio</i> de Batanero, Godino & Navarro-Pelayo (1994), das dissertações de mestrado de Correia (2008) e Ferreira (2007). • Planificação do conteúdo “combinações”.
Sessão 9 Planificação	22/10/2008 1h:30m	<ul style="list-style-type: none"> • Planificação do conteúdo “triângulo de Pascal”. • Discussão acerca de uma proposta de tarefa, retirada e adaptada de <i>Les probabilités à l'école</i> de Glaymann, R. J. & Varga, T. (1973).

Sessão 10 Reflexão e Planificação	29/10/2008 2h:30m	<ul style="list-style-type: none"> Reflexão sobre as aulas de Maria de “combinações” e do “triângulo de Pascal”. Reflexão sobre as duas primeiras aulas assistidas de Margarida. Após a reflexão, Maria descreveu a aula que leccionou no dia anterior sobre o “binómio de Newton”.
Sessão 11 Reflexão	5/11/2008 2h:30m	<ul style="list-style-type: none"> Proposta de nova calendarização de aulas a assistir a Margarida. Apresentação de uma proposta de questionário a ministrar aos alunos no final da leccionação da Combinatória. Reflexão da aula de Maria sobre o “triângulo de Pascal”.
Sessão 12 Reflexão	12/11/2008 2h:30m	<ul style="list-style-type: none"> Reflexão sobre a aula de Margarida de “combinações”.
Sessão 13 Reflexão	19/11/2008 2h:00m	<ul style="list-style-type: none"> Reflexão sobre a aula de Margarida acerca do “triângulo de Pascal”. Reflexão sobre a aula de Maria do “binómio de Newton”. Reflexão sobre a aula de Margarida do “binómio de Newton”.
Sessão 14 Reflexão	02/12/2008 2h:00m	<ul style="list-style-type: none"> Reflexão sobre os dados fornecidos pelo questionário que as participantes passaram aos seus alunos. Balanço final do trabalho desenvolvido.

Como se pode verificar pelo quadro 11, nas sessões trabalharam-se, sobretudo, questões relativas ao estudo à planificação e à reflexão das aulas. Nesta secção trataremos apenas a questão da planificação, sendo a reflexão tratada em outras secções posteriores.

A planificação do tema de “Análise Combinatória” elaborada na sessão 1 pelo subgrupo de trabalho de 12.º ano da escola de Margarida e da investigadora teve de ser alterada na sessão 2, no sentido de a compatibilizar com a planificação feita na escola de Maria. No quadro 12 apresenta-se versão final da planificação.

Quadro 12 – Planificação do tema de “Análise Combinatória”

Conteúdo	Objectivos	Estratégias	Blocos (90m)
<ul style="list-style-type: none"> Princípio fundamental da contagem. Operações Combinatórias: <ul style="list-style-type: none"> Arranjos completos; Arranjos simples; Permutações; Combinações sem repetição. Triângulo de Pascal e suas propriedades. Binómio de Newton. Aplicações ao cálculo de probabilidades. 	<ul style="list-style-type: none"> Seleccionar estratégias para resolver problemas. Resolver problemas de contagem. Resolver problemas de contagem, envolvendo várias operações de combinatória Resolver problemas aplicando os conhecimentos de Combinatória. 	<ul style="list-style-type: none"> Realização de tarefas de investigação. Utilização de material manipulável. Resolução de problemas. Manipulação da máquina de calcular para descobrir certas matemáticas. Elaboração de composições. Realização de tarefas de investigação. 	01
			04
			01
			01
			01
			02
			01
			03

A sequência apresentada foi seguida nas várias sessões realizadas, e também cumprida por Margarida. Maria alterou a sequência da leccionação dos conteúdos, aludindo o tempo disponível, como limitado, o facto de a abordagem que preconizámos e que implementou na primeira aula exigir bastante mais tempo para leccionação e o facto de na sua escola se ter considerado necessária esta reformulação. Sendo assim, esta professora leccionou as “permutações” antes dos “arranjos simples” e ministrou três blocos de “aplicações ao cálculo de probabilidades”, antes de leccionar o “triângulo de Pascal”, como se confirma no quadro 13. Maria leccionou nove aulas, mais cinco aulas extra (ver quadro 13), embora estivessem previstas inicialmente apenas 12 aulas.

Quadro 13 – Aulas implementadas por Maria no tema de “Análise Combinatória”

Dia	Conteúdo leccionado
09/10/08	– Arranjos com repetição
14/10/08	– Arranjos com repetição. Conclusão. Permutações
15/10/08	– Resolução de exercícios, <i>aula extra</i>
15/10/08	– Arranjos sem repetição
16/10/08	– Combinações e permutações com repetição, <i>aula extra</i>
16/10/08	– Resolução de exercícios
17/10/08	– Cálculo de probabilidades: resolução de exercícios, <i>aula extra</i>
21/10/08	– Cálculo de probabilidades: resolução de exercícios
22/10/08	– Resolução de exercícios sobre o cálculo de probabilidades, <i>aula extra</i>
22/10/08	– Cálculo de probabilidades: resolução de exercícios
23/10/08	– À descoberta do triângulo de Pascal, <i>aula extra</i>
23/10/08	– Continuação da aula anterior
28/10/08	– Binómio de Newton
29/10/08	– Resoluções de exercícios sobre os conteúdos leccionados

Margarida leccionou 12 aulas, mais uma aula extra, conforme se verifica pelo quadro 14. Da planificação estabelecida para o tema, esta professora apenas cumpriu o que estava estabelecido para o “triângulo de Pascal”. Em todos os outros casos, excedeu o tempo previsto em virtude de ter implementado, com convicção, todas as tarefas de acordo com o trabalho desenvolvido nas sessões de planificação, com as suas concepções e porque também sentiu dificuldades em gerir o tempo necessário para o desenvolvimento da sua acção lectiva, destacando o quão difícil é para um professor pôr em prática este tipo de acção.

Quadro 14 – Aulas implementadas por Margarida no tema de “Análise Combinatória”

Dia	Conteúdo leccionado
21/10/08	– Actividade de investigação, introdutória ao estudo da Combinatória
22/10/08	– Princípio fundamental de contagem
24/10/08	– Arranjos com repetição
28/10/08	– Resolução de exercícios, <i>aula extra</i>
05/11/08	– Arranjos simples e permutações
07/11/08	– Combinações e permutações com repetição
11/11/08	– Resolução de problemas
14/11/08	– Triângulo de Pascal
18/11/08	– Resolução de problemas.
19/11/08	– Binómio de Newton
21/11/08	– Cálculo de probabilidades: resolução de exercícios.
25/11/08	– Cálculo de probabilidades: resolução de exercícios.
26/11/08	– Cálculo de probabilidades: resolução de exercícios.

No quadro 15 apresenta-se uma breve descrição de todas as aulas que foram assistidas e seleccionadas para descrição, análise e reflexão nos estudos de caso correspondentes a cada participante.

Quadro 15 – Breve descrição das aulas observadas a cada uma das participantes

Data	Assuntos a tratar	Observação	Observadores
09/10/08	Arranjos com repetição	Maria: aula 1 – Os alunos analisaram, em pares, um conjunto de respostas seleccionadas pela professora em casa. – Procedeu-se à resolução da ficha de trabalho 2, verificando-se que os alunos tiveram dificuldades em expor um raciocínio correcto na resolução de um problema de partição da Batanero <i>et al.</i> (1997). No entanto, com a ajuda da professora, compreenderam e realizaram com sucesso a tarefa e os exercícios de consolidação, que se resolveram na aula seguinte. O guião não foi cumprido.	Margarida e Bárbara
16/10/08	Combinações	Maria: aula 2 – Os alunos chegaram à operação usando os conhecimentos adquiridos anteriormente acerca das permutações e dos arranjos simples, manifestando um bom desenvolvimento do seu raciocínio analógico (English, 1998, 2005). O guião foi cumprido. Os alunos trabalharam individualmente.	Bárbara
21/10/08	Tarefa de investigação introdutória	Margarida: aula 1 – A turma foi organizada em grupos de 4 alunos, como tinha sido acordado na planificação da tarefa. Foram atingidos completamente os objectivos. Porém, o guião da aula não foi cumprido.	Bárbara

23/10/08	Tarefa “À descoberta do Triângulo de Pascal”	Maria: aula 3 – Tarefa de exploração implementada, tendo como objectivo a descoberta do triângulo de Pascal e suas propriedades. A turma estava organizada em grupos constituídos por quatro elementos. O guião de aula foi cumprido na íntegra.	Margarida e Bárbara
24/10/08	Arranjos com repetição	Margarida: aula 2 – A sala estava organizada em grupos de quatro elementos. – Depois de ter assistido à aula de Maria, Margarida implementou a mesma aula, seguindo o guião definido, mas, como tinha sido decidido nas sessões de trabalho conjunto, Margarida entregou ao aluno as respostas que o próprio elaborou, aquando da realização do teste no início do ano, para serem analisadas nos grupos. Os alunos não resolveram o problema da ficha 2 de Batanero <i>et al.</i> (1997b) como na aula de Maria, ficando adiada a sua resolução para a aula seguinte. O guião de aula não foi cumprido.	Bárbara
28/11/08	Binómio de Newton	Maria: aula 4 – Os alunos trabalharam individualmente uma actividade, entregue a cada um em formato de papel. Foi através de um diálogo desencadeado por sucessivas questões suscitadas e orientadas pela professora e pela estrutura da ficha que os alunos chegaram à generalização do desenvolvimento do “binómio de Newton”. – Através dos mesmos procedimentos, chegaram ao desenvolvimento do termo geral. – Resolveram-se exercícios de consolidação. – O guião foi cumprido.	Bárbara
07/11/08	Combinações	Margarida: aula 3 – Margarida colocou os 28 alunos em grupos de 7 elementos, tendo o cuidado de ser ela a construir os grupos, no sentido de proporcionar estratégias de resolução diversificadas com potencial para provocar discussão. – Margarida distribuiu as folhas com as respostas de cada aluno à questão 4. Deu algum tempo, não tanto como ela queria, pois hoje pretendia avançar mais do que na última aula. Mas os alunos estão habituados a trabalharem de forma independente. Margarida geriu muito bem a apresentação das conclusões dos diferentes grupos, pois, como se propôs avançar em termos de plano de aula, apenas colocou um porta-voz de um grupo no quadro e os outros grupos foram dando achegas. Alguns alunos, através da questão do teste, não conseguiram entender “o erro de ordem”. Margarida ia preparada com outro tipo de problemas, usando materiais para os alunos e desafiando-os a jogarem um mini totoloto. – O guião não foi cumprido.	Maria e Bárbara
14/11/8	Triângulo de Pascal	Margarida: aula 4 – Os alunos de Margarida estavam como de costume organizados em grupos, só que a turma estava dividida em turnos, e, por isso, encontravam-se presentes apenas 15 alunos, distribuídos em 3 grupos de 5. Margarida deu 20m aos alunos para trabalharem com os	Maria e Bárbara

		<p>colegas do grupo; só depois passou ao debate no grupo turma. A tarefa implementada foi exactamente a mesma que Maria usou. Seguiram a orientação da ficha; no entanto, Margarida sentiu necessidade de levar como recurso didáctico material que lhe permitiu concretizar o problema introdutório da tarefa. Com o questionamento adequado, e depois de trabalharem autonomamente em grupos, os alunos chegaram ao objectivo pretendido. O material que levou foi utilizado em vários episódios da aula, o que penso que foi muito útil para a compreensão do conceito por parte dos alunos.</p> <p>– O guião foi cumprido.</p>	
19/11/08	Binómio de Newton	<p>Margarida: aula 5</p> <p>– A sala estava organizada em 2 grupos de 6 alunos e 4 grupos de 4 alunos.</p> <p>– Margarida cumpriu exactamente o guião da aula de Maria, chegando à generalização facilmente. Margarida ficou “presa” na questão 1.3, pois a fotocópia do enunciado não contemplava uma figura que seria o alvo para atirar a seta e determinar a probabilidade de acertar. Os alunos não estavam em consonância com a professora, e gerou-se uma discussão um pouco confusa, verificando-se que os intervenientes não estavam a trabalhar no mesmo contexto. Os objectivos foram alcançados.</p> <p>– O comportamento dos alunos foi deveras exemplar.</p> <p>– O guião não foi cumprido.</p>	Maria e Bárbara

A investigadora apresentou uma proposta de tarefa à equipa (Sessão 2), à qual as professoras aderiram com curiosidade na sua implementação, achando-a pertinente e interessante. A tarefa consistia numa adaptação do teste desenvolvido por Correia (2008), e com ele pretendia-se dar oportunidade aos alunos de explorarem problemas combinatórios antes da instrução directa (English, 2005). Para tal, administraram-no aos alunos antes de começarem a leccionar o tema de Combinatória, o que coincidiu com o início do ano lectivo. O objectivo era analisar e descrever as estratégias utilizadas pelos alunos e identificar factores potenciadores de uma aprendizagem significativa, culminando na adaptação das nossas estratégias de ensino às estratégias reveladas pelos discentes. Perspectivámos, assim, a preparação de tarefas que levassem os alunos a estabelecerem relações entre as ideias que já tinham e os conhecimentos novos que iriam adquirir.

Na sessão 3, as professoras já tinham aplicado o teste, emergindo, durante a análise de algumas respostas e discussões no grupo, o seguinte diálogo:

Maria: (...) tendo em conta estas dificuldades, não é? Tentar analisar na turma. Assim é mais fácil perceber o que alguns pensaram. Eles estarem a falar connosco, não é? Era mais fácil do que escrever.

Margarida: Sim.

Bárbara: Uma aula de debate?

Maria: Até porque vai ser uma grande ajuda, porque a partir daí nós... não é? Vai-se chegar a resultados interessantes para depois começar o trabalho.

Bárbara: E é um confronto de ideias e discussão entre os alunos da turma, não é? Qual a dificuldade?

Maria: E aí é mais fácil porque uns poderão numa forma e outros doutra, e vão explicar uns aos outros como é que pensaram, e vai ser mais fácil perceber o caminho certo.

Margarida: Vamos.

Maria: Vamos. Acho que sim.

Bárbara: Isso quer dizer que vocês gostaram de usar este teste?

Maria: Sim.

Margarida: Que tem... eles usam isto, usam isto que é... Portanto, um exemplo pode ser dado a um aluno, ele foi dado, e depois aparece aqui a realização do aluno, e depois ajudam o professor a partir daquela realização a perceber o erro. Porque muitas vezes eu olho para um erro e digo assim: 'Ai! Ele errou por causa disto assim, assim'. E outra colega diz assim: 'Olha, repara que ele fez isto, se calhar...'. E depois vou ver isso, se calhar. (Sessão 3)

Passada uma semana, na sessão seguinte, as participantes surgiram com uma nova ideia de organização da planificação das aulas, tendo como base, também, as respostas dos alunos às questões do teste já resolvido:

Margarida: Eu gostava que começássemos a falar sobre o objectivo. (...) Mas em termos também de aulas, (...) começamos uma abordagem na parte da combinatória usando estes exemplos, é isso?

Maria: Exactamente. Perceber que estratégia é que eles usam.

Margarida: Mas vamos fazer uma mistura de tudo o que está aqui ou vamos por etapas? Fazemos isso pausadamente. Portanto, analisamos, interferimos a meio com outras coisas ou não?

Maria: Eu acho que seria interessante fazer como a Margarida disse. (Sessão 4)

Dadas as diferentes características de trabalho, postura e atitude de ambas as professoras, ficou acordado existir sempre abertura para cada uma realizar tarefas que poderiam não ser consideradas nas sessões de planificação. Para tal, elaborámos um guião orientador pouco estruturado de cada aula (Anexo III), onde constava uma tarefa introdutória comum, adaptada do teste de Correia (2008), e as tarefas de desenvolvimento. As tarefas de desenvolvimento integravam-se numa ficha que elaborámos em conjunto, a partir das várias propostas feitas pelos elementos do grupo nas sessões, ou até informalmente, e compiladas posteriormente em casa pela investigadora. As várias fichas de trabalho elaboradas (Anexos III) foram distribuídas aos alunos, de acordo com o assunto abordado em cada aula.

Na sessão 1 tínhamos concordado que deveríamos iniciar a leccionação das operações combinatórias de “arranjos completos”. No entanto, na sessão 4 foi negociada novamente a

sequência da leccionação das operações, visto Maria sugerir iniciar com o estudo das “permutações”. Mas pelo facto de os alunos apresentarem maior dificuldade nesta operação, como se verificou também em outras investigações, concordámos manter a ordem inicialmente acordada: arranjos completos, arranjos simples, permutações e combinações, pois, deste modo, os alunos ficavam motivados para a aprendizagem das operações seguintes, que se tinham revelado mais difíceis aquando da realização do teste.

É de enfatizar que Bárbara facultou vários textos de apoio às participantes, no sentido destas fazerem uma leitura em casa e de forma a sustentar teoricamente todo o trabalho que se desenvolveu.

4.1.1. Tarefa introdutória

Na sessão 5 foi analisada a tarefa apresentada por Bárbara, retirada de Spangler (1991) e enviada previamente por e-mail às participantes, sendo feita a sua discussão ao longo das sessões seguintes. Margarida questionou o grupo acerca da pertinência da implementação desta actividade, pois não ia de encontro ao estudo de qualquer operação combinatória, concluindo-se, então, que seria uma actividade introdutória às técnicas de contagem. A essência desta actividade está não tanto no cálculo matemático necessário para a usar, mas nos processos de pensamento matemático que subjazem à sua resolução (Spangler, 1991). Pretendia-se encorajar os alunos a pensar a este nível de análise, com vista a ajudá-los a formarem uma visão da matemática como uma disciplina lógica, interessante e provocadora do pensamento. Para além disso, Bárbara apresentou esta tarefa no sentido de os alunos fazerem uma aprendizagem gradual, que culminaria na resolução futura do famoso problema de probabilidades sobre os aniversários, que consta da brochura *Probabilidades e Combinatória: Matemática – 12.º ano de escolaridade*, de Martins, Monteiro, Viana e Tukman (1999), e onde é possível colocar questões abertas aos alunos, fugindo deste modo à implementação de tarefas de natureza rotineira.

Após feita a apreciação de tal tarefa, achámos que seria interessante, em termos de plano de aula, ser implementada nos primeiros 45 minutos e, de seguida, seria leccionado o “princípio fundamental de contagem”. Foram apresentadas várias situações de ensino, reforçando-se constantemente a importância desta temática como fundamental para a compreensão por parte dos alunos da operação de multiplicação, como base de todo o raciocínio combinatório. Ponderámos iniciar com o problema das várias toilettes de Ana, retirado de DeGuire (1991), pois

considerámos ser significativa para os alunos uma vez que tratava de uma realidade próxima deles (Fernandes, 2007).

Reflectimos sobre a pertinência do uso da estratégia de enumeração, seguida da representação gráfica em diagrama de árvore no quadro, pois alguns alunos podem achar mais significativa a representação gráfica da listagem. Por fim, achámos importante falar no produto cartesiano de dois conjuntos, e, conseqüentemente, do seu cardinal em relação ao cardinal dos conjuntos iniciais (English, 2005), conceito que está na base do princípio da multiplicação. Foram apresentados mais problemas, no sentido de verificar se os alunos compreenderiam o conceito. Ficou para trabalho de casa a selecção de exercícios, tendo em conta a construção do diagrama de árvore com três ramos e a adequação dos exercícios do manual escolar.

Margarida pediu autorização à equipa de trabalho para utilizar no PAM esta tarefa de investigação (Anexo III), e estava ansiosa por ministrá-la à sua turma do 9.º ano. Acrescentou que, desde que fornecêssemos os materiais físicos construídos para o efeito, chegariam, de uma forma informal, às conclusões pretendidas.

Durante a sessão 8, Margarida levantou várias questões acerca da implementação da actividade introdutória, uma vez que não era usual ministrar este tipo de tarefas. Por isso sentia uma certa insegurança. Para esta reunião, além dos livros escolares, foram levados variados recursos: um modelo físico de apoio à implementação da actividade que consistia numa caixa de cartão de 12 ovos, feijões vermelhos, feijões brancos e uma saca para inserir os papelinhos com os meses de aniversário dos alunos, a distribuir pelos grupos de trabalho.

Arranjos Completos

Ainda na sessão 5, Maria fez a apresentação de uma proposta do plano informal sobre a sua primeira aula assistida pelas colegas. Apresentou sugestões de algumas respostas, escolhidas por ela, sobre arranjos completos. Esta professora tinha informado, em sessões anteriores, e reforçou novamente a ideia, que era notório nas respostas apresentadas pelos seus alunos verificar que muitos já tinham tido instrução de Combinatória, provavelmente em explicações. Considerando também outros factores, seleccionou respostas que achou pertinentes para os alunos analisarem em pares e, ao partilhar com a equipa, justificou a sua escolha do seguinte modo:

Bárbara: Olha, Maria, então tu achas que fazes bem em seleccionar, em vez de dares os testes a cada um dos alunos, o seu próprio teste?

Maria: Pois. O que acontece é assim, ao eu dar os testes a cada um o que é que ia acontecer? Muitos usaram o mesmo processo, e depois era assim, estarmos a

perguntar, por exemplo: ‘Explica-me tu’, e eles: ‘ah, porque eu fiz uma árvore assim’, e tu perguntas: ‘e como?’ , não estavam a ver o exemplo dele, ou seja, esse tinha que ir fazer a árvore. A seguir o outro: ‘eu fiz uma árvore mas não fiz assim’, ‘então vai fazer a outra assim’, que é igual. (Sessão 5)

Margarida comentou que as respostas que Maria tinha escolhido estavam correctas, ao que a Maria respondeu que teve 100% de respostas correctas na questão 2a); relativamente às outras, algumas apresentavam-se incompletas e incorrectas. No entanto, Maria referiu que deveríamos premiar as respostas correctas.

Bárbara chamou a atenção para a conveniência de apresentar várias situações aos alunos nos problemas que se propõem, nomeadamente, variar o tipo de elementos como números, objectos e pessoas, bem com ter em conta o número de objectos, pois como verificámos no teste, à medida que o número de elementos aumentava, o número de respostas correctas diminuía. Maria mencionou que o tipo de problemas que seleccionou contemplava estes requisitos. Em sessões anteriores, constatámos que alguns alunos de Margarida responderam incorrectamente à questão 2a) e muitos usaram a estratégia “operação”. Perante esta realidade, esta docente e a investigadora acharam que seria mais pertinente, aquando da leccionação das operações, organizar a turma em grupos e entregar a resposta do próprio teste a cada aluno – “Vamos entregar o teste ao aluno, seria um ponto de partida”, para que desta forma eles reflectam em conjunto sobre as estratégias usadas, os erros e dificuldades sentidas, partilhando e confrontando as resoluções de cada um com os colegas, justificando, desta forma, porque consideram as suas respostas correctas, e dando oportunidade aos alunos de procurarem sozinhos a solução. Porém, Margarida e os outros elementos da equipa de trabalho depararam-se com vários dilemas, como se ilustra a seguir:

Margarida: Eu estou a imaginar a situação, ao entregar aos alunos o teste. Tudo bem, estou de acordo. Agora, eu estava a pensar era: que diálogo, ou o que é que eu posso comunicar que consiga exprimir ao máximo tudo o que se passa naquelas cabecinhas. Porque a maneira como eu comunico, as perguntas que eu vou fazer ou não vou fazer, pode fazer com que o processo seja muito rápido e muito superficial. Posso conseguir aprofundar, e posso aprofundar e ao mesmo tempo conseguir recolher a informação e depois fazer com que tudo fique claro, como posso aprofundar e confundir tudo. (Sessão 5)

Na segunda parte, Margarida propôs-se realizar uma discussão no grupo turma, tendo a professora, como função, fazer um questionamento apropriado para levar os alunos a rejeitarem ou modificarem algumas ideias incorrectas e a clarificarem os seus raciocínios. Nesta fase, a professora sentiu que, para pôr em prática esta estratégia, teria que preparar muito bem em

casa esta actividade, pois exigia, por parte dela, o conhecimento de todas as estratégias usadas pelos alunos para poder desenvolver um questionamento pertinente.

Margarida: Então (...), nós temos que estudar muito bem o que está nos testes. O que cada um pensa (...), eu conheço muito bem o material que eles têm nas mãos.

Bárbara: Convinha.

Margarida: Para conseguir confrontar, fazer assim umas questões interessantes. (Sessão 5)

Na sessão 6, Maria apresentou o guião final da sua aula à qual, no dia seguinte, Margarida e Bárbara iriam assistir. Fez algumas alterações que achou necessárias e que a equipa considerou e apropriou.

Maria: E depois de eles verem [os raciocínios uns dos outros] qual é que eles consideram que foi no fundo o mais útil, o mais fácil, aquele que produziu mais efeito directamente? Porque, por exemplo, houve alunos que fizeram a enumeração, [com mais elementos] já sentiram necessidade de fazer em árvore. Depois, antes de chegar à generalização [2c)] e à [2d)] terão de tentar resolver exercícios que envolvessem o mesmo raciocínio, ver exactamente que processo agora é que eles vão escolher. O primeiro é simples, que é lançar cinco vezes um dado cubo com as faces numeradas de um a seis. Esses até eles podem fazer pela enumeração que não vai demorar muito, não é? Mas pode ser que alguns tentem, mas até podem tentar fazer pela árvore [incompleta ou não], chegam por dedução e percebem logo quantos casos vão dar, não é? Ou poderão fazer logo pelo produto se tiverem percebido, não é? Depois é uma roda com números de um a dez, roda-se quatro vezes, quantos códigos diferentes é que podem gerar e...

Bárbara: Essa questão, então tu vais dar antes do problema de generalização?

Maria: Dou antes do problema de generalização (...) porque nenhum deles generalizou. Se tivessem feito muitos exercícios com o mesmo raciocínio, usando a regra de produto, depois eram capazes de generalizar sozinhos. Provavelmente veremos se são ou não. Eu creio que possam ser, mas depois vamos ver. Analisar primeiro o a) e o b), depois fazia estes exercícios, depois ia fazer o d) e depois no final ficava a generalização [2c)]. Para ver exactamente o que é que dava.

Bárbara: Deixa-me só perguntar-te uma coisa. O quarto item [2d)] não tem menos elementos do que o exercício que tu estás a propor?

Margarida: Tem menos, não tem?

Maria: Quer dizer que este raciocínio, [apresentado na questão 2d) do teste], para eles, não teve significado nenhum neste contexto. Zero, não é? Pois eles não o fizeram [correctamente]. (Sessão 6)

Depois desta conversa, o problema do dado foi substituído pelo lançamento de um rapa duas vezes. Em seguida, reflectimos em conjunto sobre problemas que se propuseram e que se integraram na ficha de trabalho 2 (Anexo III). Tinham sido apresentados três problemas de Batanero (1997b), pela investigadora, que se enquadravam nos seguintes modelos implícitos: um de selecção, outro de distribuição e outro de partição.

Margarida comentou que, no problema de distribuição, os alunos possivelmente apresentariam muitas dificuldades em interpretá-lo e, por isso, achámos oportuno resolvê-lo. Estivemos, então, a confrontar dois métodos de resolução: um, utilizando os arranjos com repetição, e outro que utilizava um esquema que se traduzia na soma de três parcelas, utilizando a operação combinatória Combinações. Todas achámos que este último processo seria a opção dos alunos e, como tal, seria um óptimo problema para ser resolvido novamente quando se leccionasse a operação Combinações.

Maria: Vão fazer. Eu na minha opinião acho que eles vão imaginar tipo pares ordenado (4, 0), (3, 1), (2, 2), e assim vão enumerar.

Margarida: Criar as possibilidades.

Maria: Eu acho que o problema vai surgir quando eles tiverem (3,1) e (1,3) porque se não tiverem noção que os quartos são diferentes, e por isso é diferente (1,3) e (3,1) (...), vão ter menos resultados do que aqueles possíveis, não é? O nosso n diminui em relação aos outros [problemas]. Aqui, neste caso, é arranjos com repetição de 2, 4 a 4.

Margarida: Apesar de que, se a Maria der este problema a seguir a toda a estrutura que está a fazer, eles ficam um bocadinho não é? Condicionados pelo que aconteceu na aula, não será? (Sessão 6)

Nesta sessão e em conversa informal com Maria, a investigadora percebeu que esta professora se preocupa de forma exagerada com a preparação dos alunos para os testes intermédios, que culminarão no exame nacional. Chegou a falar dos rankings das escolas e na fuga dos alunos para outras instituições, particulares e públicas, na busca de melhores classificações.

4.1.2. Arranjos simples e permutações

Relativamente aos “arranjos simples” e “permutações” (Sessão 7) acordámos que seriam entregues as questões 3 e 1 do teste, para os alunos as resolverem novamente, com os conhecimentos já adquiridos. Após isso, basear-nos-íamos na abordagem feita por DeGuire (1991), documento traduzido e entregue previamente às participantes, tanto para planificar as “permutações” como para as “combinações”.

Escolhemos os problemas que já tínhamos levado em sessões anteriores, ficando Bárbara de os compilar nas respectivas fichas: ficha de trabalho 3 e ficha de trabalho 4 (Anexos III). Maria admitiu que, possivelmente, quando leccionasse as “permutações com repetição”, levaria para a aula alguns pares de sapatos do filho para concretizar uma história de introdução

ao conteúdo, o que despoletou uma conversa acerca da importância do uso de materiais manipuláveis no ensino da Combinatória.

4.1.3. Combinações

O plano de aula informal (Sessão 8) sobre a leccionação da operação “combinações” seria, como os restantes, constituído pelas tarefas introdutórias, onde entregaríamos aos alunos as respostas à questão 4 do teste. Relativamente à operação “combinações” generalizávamos a partir dos “arranjos simples” e das “permutações”, baseando-nos na abordagem feita por DeGuire (1991). A Ficha de trabalho 5 (Anexo III), relacionada com este assunto, ficou definida em conversas formais, dando especial ênfase ao problema de formar comissões com duas, cinco e oito pessoas num conjunto de 10 pessoas (Fernandes, 1990).

4.1.4. Triângulo de Pascal

Depois de partilhada variada informação, através de conversas informais sobre a planificação do conteúdo e da troca de material, para procurar a melhor maneira de leccionar, as professoras levaram para a sessão 9 propostas sustentadas no livro de Glaymann e Varga (1973). Bárbara tinha feito uma primeira adaptação de uma tarefa retirada do livro, que, posteriormente, foi discutida com as duas participantes, sendo melhorada por Maria, que leccionou mais cedo o assunto.

Inicialmente, Maria estava reticente na sua implementação. Margarida, pelo contrário, manifestou grande vontade de implementar tal actividade e tal e qual como é apresentada pelos autores. Maria ficou de apresentar uma proposta final, que achasse adequada à sua turma e que enviou por e-mail. A tarefa seria anunciada por escrito, sob a forma de Ficha orientada sequencialmente e bem organizada (Anexo III). Estas características seduziram as professoras, pois a aula centrar-se-ia no conteúdo a leccionar e seria difícil aparecerem questões novas. Assim sendo, supostamente não teriam que improvisar, pois todas as situações que emergissem na aula seriam previsíveis e controláveis, não se desviando do plano traçado e não obrigando as professoras a mobilizar os seus conhecimentos na acção (Schön, 1992), o que, de alguma forma, facilitaria o trabalho das docentes, que se têm debatido com o constrangimento do factor tempo e do cumprimento da planificação. Ficou decidido que Maria organizaria a turma em grupos de trabalho de quatro elementos e discutiria a tarefa por alíneas, pois ela achava que os alunos podiam não conseguir resolver a 1.^a alínea, demorando muito tempo na sua resolução.

No sentido de colmatar esta possibilidade, considerámos por bem gerir a discussão desencadeada no grupo turma, uma vez que esta docente tinha poucos alunos.

Após a conclusão da descrição da estrutura da tarefa, que, em princípio, seria implementada em 90 minutos, reflectimos sobre os problemas a colocar na ficha de trabalho 6 (Anexo III) alusiva ao assunto, como prática habitual. Assim, achámos pertinente tomar de novo o problema 2 da ficha 2 e pedir aos alunos que usassem um processo de resolução diferente. Margarida achou interessante um problema da brochura já referida, Bárbara achou que um problema retirado de Glaymann e Varga (1973) também se enquadrava na ficha e Maria apresentou alguns problemas de sua autoria, que ficou de passar e enviar por e-mail à Bárbara, para esta os compilar e apresentar formalmente.

4.1.5. Binómio de Newton

Como Maria estava substancialmente adiantada na sua prática lectiva, a preparação das tarefas a implementar na aula do “binómio de Newton” foi trabalhada em casa a partir de conversas informais. Bárbara sugeriu que se poderia usar o problema já trabalhado e utilizá-lo no novo contexto, tendo em conta a sugestão de Glaymann e Varga (1973). Maria sugeriu que seria mais motivador para os alunos partir de outro contexto, nomeadamente envolver áreas e volumes no ensino deste conteúdo. Elaborou, então, em casa uma actividade, semelhante à anterior (Anexo III), orientada, que a equipa aprovou e que foi implementada. Relativamente a esta tarefa, como os alunos de Maria já estavam muito familiarizados com a linguagem de probabilidade de um acontecimento, visto esta professora ter alterado a sequência da planificação inicial, leccionando “Aplicações ao cálculo de probabilidades” antes do “Triângulo de Pascal”, concordou-se em incluir na questão o conceito de probabilidade.

4.2. O caso Maria

4.2.1 Apresentação

Maria tem 32 anos de idade e leccionou 5 vezes o tema de Combinatória ao longo dos seus 10 anos de serviço docente. Esta professora tem uma Licenciatura em Ensino de Matemática e, posteriormente, fez uma Pós-graduação em “Tecnologia Educativa”.

Contribuiu para a sua adesão ao projecto de investigação a amizade de muitos anos que mantinha com a investigadora, não descurando, no entanto, os benefícios de que poderia usufruir com a sua participação no estudo.

Para ser honesta, primeiro uma relação de amizade que existe entre mim e a investigadora, uma admiração profissional muito grande pela investigadora e pela certeza que este projecto vai trazer muitas mais-valias para mim, a nível profissional, nas estratégias e na forma de ensinar especificamente este tema, mas que também vou poder transportar, claro, para outros conteúdos. (...) Provavelmente há muitas formas de fazer [um exercício], e nós fazemos sempre duma forma. E seria muito enriquecedor ver pessoas diferentes a utilizar outro raciocínio e também transportar isso para os nossos alunos. É isso também que espero, exactamente. (Entrevista inicial)

Esta professora foi incitada pela curiosidade de encontrar formas alternativas de tarefas a propor aos alunos: “Espero que traga estratégias inovadoras, que possamos trabalhar colaborativamente e eu também levar parte deste trabalho para as minhas colegas, na minha escola, e que traga muitas melhorias à minha prática educativa, especialmente neste conteúdo” (Entrevista inicial).

Maria mostrou disponibilidade, à partida, para abrir a porta da sala onde decorriam as suas aulas para ser observada, quer pela investigadora quer pela outra colega participante, depois de obtida autorização formal dos pais dos alunos. Porém, Maria mostrava-se muito preocupada com o compromisso que tinha estabelecido com o grupo de trabalho da sua escola:

(...) fazemos todos trabalho nas turmas em forma conjunta, nunca acontece numa turma os professores fazerem uns exercícios e noutra outros, nunca. Portanto, consensualmente definimos o que vamos fazer: ‘do manual vamos fazer este, este e este. Fora do manual, deste manual, este, este e este’, e todos fazemos exactamente os mesmos. Damos os testes nas mesmas semanas, com os mesmos conteúdos. Nunca dizemos as notas aos alunos sem antes os outros saberem. Há esse respeito, no fundo, pelo trabalho, uma vez que trabalhamos em conjunto. (Entrevista inicial)

A turma onde decorreu a investigação já era dela desde o 10.º ano; por isso, todas as aulas decorreram num ambiente calmo e agradável. A turma de Maria, no 10.º ano, era constituída por 23 alunos e transitaram apenas 9 para o 11.º ano. Durante o ano lectivo 2008/2009 iniciou com os 9 alunos, inscrevendo-se, no decorrer do primeiro mês de aulas, mais 4 alunos e 2 estavam a assistir, e todos tinham como disciplina de formação específica Economia. Relativamente ao aproveitamento, a professora classificou a turma como muito boa e afirmou com orgulho: “eles trabalham muito fora da aula. Eles vão todas as quartas-feiras, todos, para a sala de estudo. Eles fazem todos os trabalhos que eu mando, eles já fizeram todos os exercícios do GAVE, eles trabalham efectivamente”. (Sessão 14)

Era notória e constante a sua preocupação com a preparação dos seus alunos para os testes intermédios, os exames nacionais e o atraso provocado pela implementação de tarefas

diferentes, que poderiam comprometer o cumprimento da planificação relativamente aos colegas da escola. O conhecimento que detém sobre a maneira como os seus alunos aprendem matemática orienta esta professora no sentido de desenvolver um trabalho com eles fora da sala de aula, implementando, por vezes, de forma continuada, aulas extra. Os alunos reagem com grande receptividade a esta prática, que mantém desde o 10.º ano, tendo obtido classificações nos testes intermédios que os destacam em relação a outros e às classificações obtidas nos testes que a professora elabora ao longo do ano.

Maria teve sempre uma atitude crítica e construtiva em relação a tudo o que se fazia, nomeadamente em relação às propostas apresentadas nas sessões de planificação e na observação e reflexão das aulas.

Esta professora impõe um grau de exigência elevado em tudo o que faz profissionalmente. Mostrou sempre uma grande capacidade de organização, de envolvimento, de empenho e responsabilidade no trabalho realizado diariamente com os seus alunos, pois considerava que “os alunos são a nossa imagem” (Entrevista final).

No seu percurso escolar destacou-se o facto de ter sido sempre uma óptima aluna; no entanto, a sua relação com a Combinatória nem sempre foi fácil: “enquanto aluna, achava muito difícil, e hoje não consigo perceber bem porquê, pois eu tinha tanta facilidade noutros temas e naquele não tinha a mesma facilidade”. No entanto, esta relação alterou-se significativamente a partir do momento que começou a leccionar, referindo: “é um tema que eu hoje gosto bastante. No início decerto não gostava. A minha preferência acho que é Geometria, mas também gosto muito deste tema”. A razão desta mudança reside no facto de ela ter aprendido com a experiência de ensino e com os colegas.

Por isso é que no primeiro ano tive dificuldades e agora vou reformulando as minhas estratégias, também de acordo com o que eu vejo que são as dificuldades dos alunos em cada ano. Se daqui a dez anos eu der Combinatória, provavelmente eu vou dar muito melhor e duma forma muito mais segura a esses meus alunos, porque já aprendi muito, aprendi com eles também, aprendi com outros colegas e transporte novas experiências para os meus alunos. (Entrevista inicial)

Quando questionada sobre o modo como os seus professores ensinaram o tema, referiu-se à importância das estratégias usadas pelo seu professor no ensino do conteúdo, ideia que para Maria merece especial importância: “o professor que eu tive [no 12.º ano] não era decerto um professor que usava as melhores estratégias. Todas as que eu possa nomear não foram benéficas para mim nem transmitiram grandes conhecimentos, claro.” (Entrevista inicial)

Relativamente a outra formação, no âmbito deste tema, Maria referiu ter participado em actividades no ProfMat e quando foram implementados os novos programas de 12.º ano.

Pode afirmar-se que esta docente perspectiva o desenvolvimento do seu conhecimento profissional como um processo que se desenvolve com a sua experiência profissional, valorizando a reflexão sobre a sua prática e considerando também o trabalho com os colegas uma forma para aprofundar a sua aprendizagem, o que é prática comum na sua escola: “nós, geralmente, temos mais ou menos o mesmo horário, os professores que leccionam [o mesmo ano], temos sempre muito o hábito de falar do que vai acontecendo”.

Maria sente-se completamente enquadrada na sua escola, manifestando sempre um elevado apreço e respeito pela instituição e por todo o pessoal docente e não docente. O trabalho que desenvolveu com os colegas da sua escola permitiu-lhe conhecer e valorizar as vantagens do trabalho colaborativo, através da partilha e reflexão de vivências profissionais.

Porque se todos partilharmos o trabalho, acredito que seja muito melhor, trocamos experiências que tivemos, mas também fazemos um trabalho, no fundo, mais rico para os nossos alunos. Porque diferentes perspectivas, incluem diferentes estratégias, diferentes visões e ampliamos, no fundo, a perspectiva dos nossos alunos. Porque se só trabalharmos com aquilo que nós pensamos e não falarmos com mais ninguém, os alunos vão ser uns clones do professor, e portanto, há tanta dificuldade em os alunos se adaptarem a novos professores noutros anos. Se trabalharmos colaborativamente, os alunos estão preparados para professores com perspectivas muito diferentes. (Entrevista inicial)

4.2.2 Práticas pedagógicas e reflexão

Arranjos completos

Tarefas introdutórias. Maria iniciou a aula, entregando a cada aluno um documento com cinco folhas contendo respostas, por ela seleccionadas previamente, à questão 2 do teste destacando: “Ora bem, os processos [de resolução] são todos diferentes”. De imediato, uma aluna referiu que a sua resposta não tinha sido incluída, denotando que gostaria de ver o que fez, pois já tinha realizado o teste no início do ano lectivo.

Enquanto entregava as resoluções, Maria pediu aos alunos, autores das respostas entregues, para explicarem à turma o raciocínio utilizado, dando 2 ou 3 minutos para que, em pares, os alunos analisassem e verificassem os processos de resolução apresentada nas alíneas 2a) e 2b) – **2a)** Com os algarismos 1, 2 e 3 quantos números diferentes de dois algarismos podemos escrever? **2b)** Com os algarismos 1, 2, 3, 4 e 5 quantos números diferentes de dois

algarismos podemos escrever? – “O que é que eu quero que façam? Pode ser dois a dois, analisem por favor estas duas primeiras respostas em todas as folhas”.

Maria falou todo o tempo e forneceu todas as explicações, umas vezes completando os raciocínios iniciados pelos alunos, outras vezes transformando o que os alunos diziam noutra linguagem, que ela achava que eles compreenderiam melhor ou visando organizar o discurso do aluno, como se ilustra no diálogo seguinte:

Maria: Então pensou como a Filipa. Só que a Filipa escreveu em texto e depois fez a enumeração. E o André pensou numa árvore, não é? Ou seja, primeiro deu a resposta e depois...

André: Para o primeiro dava três...

Maria: Para o primeiro dava três hipóteses, não era? E depois para o segundo, três. Então quer dizer, pensou assim: o primeiro algarismo teria três hipóteses, o segundo tinha três hipóteses, e por isso deu nove, foi?

Após ter mantido este diálogo com os alunos e de eles terem, em conjunto, chegado à resposta correcta das alíneas 2a) e 2b), a docente perguntou se seria então necessário usar o diagrama de árvore, a tabela ou a enumeração para responder às questões.

Maria: Então, se agora escolhêssemos aqui um processo para resolver as duas questões, como é que vocês resolviam a a)? Como é que fariam?

Aluna: 3×3 .

Maria: 3×3 . E o b)?

Aluna: 5×5 .

Maria: Ou seja, já não pensavam em árvore?

Alunos: Não.

Maria: Já não faziam a enumeração?

Alunos: Não.

Maria: Fariam todos o produto, Patrícia?

Patrícia: Sim.

Maria: Ou faria árvore?

Patrícia: Não.

Maria: Fazia sempre o produto? Muito bem. Então vamos ditar aqui uns exercícios para fazer. Exercício 1. Posso ditar?

Maria conduziu os alunos à resposta pretendida através de uma sucessão de questões de *confirmação e focalização* (Ponte & Serrazina, 2000), em que o professor, conhecendo a resposta, pretende confirmar se os alunos também a conhecem.

Depois de ditar os dois exercícios, que constavam do guião da aula, foi dado algum tempo para os alunos os resolverem sozinhos. No caso do exercício 1 – A Inês vai lançar um rapa (R; T; D; P) duas vezes consecutivas. Quantos são os resultados possíveis? – o Pedro, depois de solicitado, respondeu: “Existem 4 faces, num lançamento existem 4 hipóteses; se for em 2

lançamentos será 4×4 ", e o André acrescentou: 4^2 . Partindo desta constatação, a professora escreveu de imediato no quadro: $4^2, 4^4, \dots, 4^{100}$. Uma aluna corroborou a escrita da professora, pois não se iria escrever $4 \times 4 \times \dots \times 4$ (50 vezes) se girássemos o rapa 50 vezes, mas sim 4^{50} .

Relativamente ao exercício 2 – O João Hardware decidiu criar um código de acesso ao seu cacifo. O código é uma sequência de 3 letras e dois dígitos. Quantos códigos consegue formar? (Nota: Considera o alfabeto com 26 letras) – a professora escreveu no quadro a resposta de Rita: $26 \times 26 \times 26 \times 2 \times 2 \times 2$. Outra aluna acrescentou: "Se fizermos como o André fica: $26^3 \times 2^3$ ".

De seguida, a professora, orientando os alunos, propôs-lhes que analisassem criticamente as respostas à alínea d) – Com os algarismos 1, 2, 3, 4 e 5 quantos números diferentes de três algarismos podemos escrever? –, dizendo:

eu quero que tenham capacidade crítica (...); olhar para a a) e b) e ver o processo que utilizaram para a a) e para a b). E depois, na d), [verificar] se mantiveram o processo. Por exemplo, estas estavam erradas e a d) está certa ou estas estão certas e a d) está errada. Sim? Em cada uma eu quero que pensem assim.

Continuando, a professora pediu à aluna Elsa para que lhe explicasse o raciocínio por si usado.

Maria: Há aqui [teve] preguiça para fazer, leu mal e não viu que era três, e viu que era dois? Diga o que é que pensou.

Elsa: ...

Maria: Ou seja, e não achou ridículo dar 20, quando à frente, com dois, lhe tinha dado 25?

Elsa: Pois, enganei-me.

Maria: Não tem capacidade crítica para dizer? Oh meu Deus! Então, quer dizer, tem menos ainda que a resposta b)? Mas se hoje fizesse como é que pensaria?

Elsa: Se calhar, acrescentava um ramo à árvore.

Maria: Sim. Ah! Sem fazer o produto como nós fizemos até agora, acrescentaria um ramo à árvore. André, ora muito bem, vamos explicar a d) da segunda página. Como é que pensou, se não se importa? Porque é assim, o André...

A professora pediu ao André para explicar o seu raciocínio, visto estar correcto. O André explicou que, com 2 algarismos, tinha 25 números, na alínea b). Por isso, nesta situação, seria 25×5 , acrescentando que seria 5^3 porque "são três dígitos e para cada um temos 5 hipóteses", ao mesmo tempo que escrevia no quadro:

$$\begin{array}{r} 25 \times 5 \\ - \quad - \quad - \quad 5^3 \\ 5 \quad 5 \quad 5 \end{array}$$

Após a resolução da alínea d), passou-se para a resolução da alínea 2c). Nesta alínea, um aluno apresentou como resposta $2n$. Confrontado com a explicação desta resposta, ele justificou-se: “queria usar a alínea b) mas perdi-me”. A professora tomou o que o João escreveu e copiou para o quadro:

Algarismos	Números
1	5

De seguida, outros alunos completaram:

2	$25 = 5^2$
...	...
n	n^2

Rita apressou-se a dizer: “usei os dois exemplos de cima”, a alínea a) e b), e a professora escreveu no quadro:

2.a) $3 \times 3 = 9$	3^2
2.b) 5×5	5^2
2.c) $n \times n$	n^2
	n^3 se tiver 3 algarismos
	n^5 se tiver 5 algarismos

Maria conduziu a resolução das tarefas propostas, exercendo um grande controlo sobre a actividade matemática dos alunos.

Tarefas de desenvolvimento. Aquando da resolução do problema 1 da ficha de trabalho 2 (Anexo III) – Numa caixa há quatro berlindes numerados com os dígitos 2, 4, 7, 9. Escolhemos um dos berlindes e registamos o seu número. Pomo-lo de volta na caixa. Repetimos o processo até que formemos um número de três dígitos. Quantos números diferentes de três dígitos é possível obter? Por exemplo, podíamos obter o número 222. – um aluno de Maria comentou: “é como que seja uma extracção com reposição”, ou seja, o aluno sentiu necessidade de comparar, por analogia, o novo com o já conhecido, usando desta forma um raciocínio analógico. Após várias intervenções dos alunos, Maria escreveu no quadro o esquema:

$$\begin{array}{ccccccc} 1.^{\circ} V & 2.^{\circ} V & 3.^{\circ} V & & & & \\ 4 & \times & 4 & \times & 4 & = & 4^3 \end{array}$$

A professora questionou a turma no sentido de conhecer o número de alunos que tinham respondido 4^3 . Levantaram o braço 7 alunos, embora os restantes também tivessem respondido correctamente.

A questão 3 – Um rapaz tem quatro carros de cores diferentes (preto, laranja, branco e cinza) e decidiu distribuir os carros pelos seus amigos Peggy, John e Linda. De quantas formas diferentes é que ele pode distribuir os carros? Por exemplo, ele podia dar todos os carros à Linda. –, um problema de “partição”, não foi trabalhada na sessão de preparação da aula. A professora pediu aos alunos que descrevessem o raciocínio usado, e a Catarina disse logo 4^3 , acrescentando: “4 carros por três pessoas”. Maria apressou-se a escrever no quadro $4 \times 4 \times 4$ e colocou a questão: “Todos vão receber o carro preto, por exemplo ao mesmo tempo?” Deste confronto com o erro, um aluno sugeriu que seria como sentar 4 pessoas e a Maria escreveu $4 \times 3 \times 2$. Tendo um aluno sugerido que “A Peggy fica com 4 carros”, a professora escreveu no quadro algumas configurações:

P	L	J
4	–	–
3	1	–
3	–	1
2	1	1

A discussão manteve-se por uns bons minutos, permitindo que todos os alunos partilhassem as suas ideias e revelando dificuldades relativamente à realização desta tarefa. Durante esta parte da aula, Maria utilizou um questionamento apropriado, visto que quis conhecer os porquês das respostas erradas e correctas que iam surgindo, valorizando, desta forma, as capacidades dos alunos e proporcionando-lhes oportunidades de descoberta.

Devido ao avançado da hora e perante as dúvidas dos seus alunos, a professora estabeleceu algumas conclusões que escreveu no quadro: “Vamos fixar os carros”.

preto ,	laranja ,	Branco	e cinza
P	L	B	C
↓	↓	↓	↓
3 hipóteses			

Maria: Ou vai para a Peggy, eu vou pôr aqui por letras, ou vai para o John ou vai para a Linda. Sim? Depois, o carro laranja pode ir para quantas pessoas?

Aluna: Para três.

Maria: O branco?

Aluna: Para 3.

Maria: E o cinza? Para três. Quer dizer que a forma que eu tenho para distribuir os carros vai ser 3^4 . Sim? Agora vão ler o enunciado seguinte. Ora bem, Joaninha,

posso, querida? Diz assim: ‘Quatro crianças, a Alice, a Berta, a Carol e a Diana, vão passar a noite a casa da avó delas. Ela tem dois quartos diferentes disponíveis, um no rés-do-chão e outro no andar de cima, nos quais ela pode colocar algumas ou todas as crianças para dormir.’ Ou seja, quer dizer, podem ficar todas num e nenhuma no outro, não é, ou ela dividir as crianças. Ela pode usar só um quarto para colocar as crianças ou ela pode colocar a Alice, a Berta e a Carol no rés-do-chão e a Diana no quarto de cima. Sim?

Perante este problema de distribuição, os alunos de Maria reagiram com muita facilidade à sua resolução.

Reflexão

Nos comentários que Maria teceu ao longo da planificação da lição não se vislumbrava que a aula fosse tão expositiva e orientada, bem como o não cumprimento do guião previamente definido, tendo proferido:

eu acho que até um bloco para arranjos com repetição é muito, é cansativo. Até para eles vai ser cansativo porque..., eles não vão precisar e vão dizer: ‘ai, isto é tão fácil’, e depois na aula a seguir levam um balde de água fria porque já não é tão fácil. (Sessão 5)

Temos de ter em conta que um plano de aula, por mais informal que seja, é um conjunto de intenções que nem sempre é realizado e cuja apropriação depende das perspectivas do professor que o implementa. No caso de Maria, talvez mais as suas perspectivas sobre o ensino da matemática do que o não cumprimento do guião expliquem a sua perplexidade no fim da aula: “Se dermos assim a Combinatória não cumprimos o programa e o teste intermédio realiza-se no dia 10 de Dezembro”. Na aula seguinte, agendou aulas extra para consolidação de conteúdos, propondo a resolução de problemas e exercícios do manual.

Margarida, que mais tarde leccionou o mesmo conteúdo, questionou Maria sobre aspectos didáticos, nomeadamente a exploração do problema 3 da ficha de trabalho. Nesta situação, através das questões postas pelas colegas que assistiram à sua aula, Maria clarificou o seu raciocínio ao repensar e avaliar a situação vivenciada e ao confrontar a sua opinião com a das colegas, promovendo o seu enriquecimento profissional e pessoal na medida em que adquiriu novos conhecimentos a partir da sua prática lectiva.

É de salientar as dificuldades apresentadas pelos alunos ao problema 3 da ficha de trabalho, que Maria explica da seguinte forma,

era um problema de enunciado de grau de dificuldade acima do habitual, a interpretação. Para além daquilo que se exige habitualmente no 12.º, de um raciocínio muito elaborado e fora do contexto, completamente descontextualizado

do que eles habitualmente fazem, porque eles têm que inverter a ordem, ou seja, eles não vão pensar... Eles habitualmente pensam é nas pessoas para os carros e não nos carros para as pessoas. Isso, para eles, no início foi alguma confusão e só orientados... Observando pela confrontação das respostas erradas é que foram chegando. Claro que não chegaram, efectivamente, sozinhos ao resultado. Chegaram a uma orientação e houve uma hipótese de um que dizia: 'ah, podem ficar os cinco numa pessoa e os outros não têm nenhuma, depois...' isso foi o registo. Mas, para efectivamente eles chegarem ao raciocínio de que poderia ser três hipóteses para o primeiro caso, três hipóteses para o segundo, eu tive que os orientar muito para isso, eles sozinhos não conseguiriam. (Sessão 7)

Nas respostas que apresentou às questões levantadas pelas colegas, pelo facto de ouvir a sua própria voz, Maria recolheu nova informação que a estimulou a ver algumas situações sob novos prismas. Apesar dos constrangimentos, Maria considerou que houve aspectos positivos a retirar, como a leitura e a interpretação:

Olha, Margarida, eu acho que consegui só uma coisa. A primeira coisa e a mais importante é que eles agora já lêem muitas vezes o enunciado. Hoje eles leram para aí três vezes cada enunciado. (...) Porque se eu dissesse: a mais-valia é muito difícil, eles... Isso eu vou ver daqui a uns tempos. Essa não me parece que seja a mais-valia. A mais valia foi adverti-los efectivamente, que eles têm que interpretar muito bem, que eles têm que criar um esquema mental, que eles não podem passar para a solução sem tentar esquematizar. E hoje [na aula seguinte] era isso que a gente fazia... (Sessão 7)

Porém, o que acaba de ser dito não foi confirmado pela prática. Como podemos verificar, o diálogo de Maria com os alunos sobre as respostas dadas às alíneas 2a) e 2b) foi dissuasor dos alunos usarem as técnicas informais de contagem, os esquemas, incentivando o uso de técnicas formais, culminando na resposta a uma questão do questionário que as professoras ministraram aos alunos no final do ensino do tema: "A resolução do teste antes de aprenderes Combinatória facilitou a tua aprendizagem das operações combinatórias? Porquê?"

Bárbara: Há aqui uma resposta: 'Sim, facilitou. Antes de aprender Combinatória era preciso um maior raciocínio e também recorrer a desenhos, diagramas, etc.'

Maria: Ou seja, o que é que acontece? Eles acabaram por achar que simplificou todos os processos que faziam anteriormente, que já não precisam de fazer isso porque... Eles acharam que isto lhes facilitou muito mais. Porque é que faziam árvores? É muito mais fácil assim, não é? (...) Porque eles agora decerto já não têm uma necessidade de esquematizar. Ou seja, neste momento eles já sabem coisas muito mais difíceis (...). (Sessão 14)

Nas palavras da Maria também se verificou o quão importante foi para os alunos a valorização das suas produções pelos colegas e pela professora, pois "resolviam o mesmo

problema por outras formas, isso é que eles gostaram. O facto de termos estudado mais pormenorizadamente cada questão [do teste], fazemos vários processos diferentes.”

Combinações

Tendo como base de trabalho o guião, a estrutura da aula de Maria seguiu um padrão, marcado pelas rotinas habituais de uma aula, e que se integram nas três fases seguintes: iniciou-se com a correcção do trabalho de casa; a seguir fez a introdução do assunto a leccionar, recorrendo às tarefas introdutórias, que consistiam na análise, feita pelos alunos, da resolução das próprias respostas que apresentaram no teste e através de um questionamento orientado pela professora chegou-se à generalização; finalmente, usando “materiais”, vários pares de sapatinhos do seu filho, nas tarefas de desenvolvimento, introduziu um novo conceito, procedendo de seguida à exemplificação e à resolução de exercícios. Nesta aula a professora não indicou trabalho para casa porque tinha, a seguir, nova aula com os mesmos alunos, onde foram resolvidos os exercícios de consolidação (da ficha e entre outros).

Iniciou-se a aula fazendo a correcção dos problemas 7 e 8 da Ficha 5 (Anexo III). Estes problemas são de autoria de Maria, e todo o processo de resolução foi orientando pela professora, em diálogo com os alunos. Relativamente ao problema 7, apresenta-se um pequeno excerto da aula:

Aluna: Oh professora, eu sei fazer o primeiro.

Maria: Sabe fazer o primeiro? Leia o enunciado outra vez. Vamo-nos calar, senão ninguém ouve. Leia pausadamente.

Aluna: ‘Se for Presidente ou Secretário, sabe-se que dos quatro restantes não vai ninguém para a direcção. De quantas maneiras diferentes...’

Maria: Nós estivemos a discutir na última aula. Eu quero saber, sem eu ter dito nada, porque depois começamos a analisar, o que é que vocês tinham respondido nessa?

Aluna: Arranjos de três um a um; e arranjos de sete, quatro a quatro.

Maria: Ora bem... Ou seja, o que é que foi? Três cartas para o João, não é, vezes sete, porque é que era o sete? A doze tirei a do João, dava onze; e depois tirei quatro que não podiam ficar com uma. Mas também é assim, não é obrigatório que João fique, até o João pode não ficar, não é? E agora qual é a outra situação? Ou, agora, os arranjos de onze, cinco a cinco, que é: se o João não ficar, tudo bem; mas ainda há outra situação. Diz? [A professora escreve no quadro $A_1^3 \times A_4^7 + A_5^{11}$]

Aluno: Se ele for tesoureiro ou vogal... [$\dots + A_1^2 \times A_4^{11}$]

Maria: Exactamente! Ainda há outra situação, nada diz se eu sou tesoureiro ou vogal. Então quer dizer se eu for tesoureiro ou vogal, todas poderão ser na mesma, não é? (...) [$A_1^3 \times A_4^7 + A_5^{11} + A_1^2 \times A_4^{11}$].

Apesar de uma aluna ter oferecido a sua colaboração, referindo que tinha resolvido a tarefa em casa, na tentativa de mostrar o seu trabalho à professora, bem como a todos os colegas da turma, a docente não valorizou esse facto, e, desta forma, não possibilitou que a aluna clarificasse o seu raciocínio nem desenvolvesse competências ao nível da comunicação e linguagem, pois, como verificámos, a professora explicou tudo. Também poderia aproveitar este problema para desafiar os alunos e criar um momento de discussão enriquecedor e potenciador de uma aprendizagem com compreensão, enfatizando a participação activa e o envolvimento de todos os seus alunos. De modo análogo foi feita a correcção do problema 8.

Tarefas introdutórias. De seguida, a professora distribuiu por cada aluno a resolução que cada um tinha feito, no início do ano, da questão 4, do teste, referindo: “quero que analisem as vossas respostas, sim? E que tentem fazer outra vez. Já está tudo feito? Pensem mais um bocadinho.”

Com o intuito de analisar as respostas dos alunos às questões 4a) e 4b) do teste – **4a)** De entre três pessoas, o Abel, a Berta e a Carla, pretende-se escolher duas para participarem num concurso. De quantas maneiras diferentes se pode fazer a escolha? **4b)** De entre cinco pessoas, o Abel, a Berta, a Carla, o David e a Eva, pretende-se escolher duas para participarem num concurso. De quantas maneiras diferentes se pode fazer a escolha? – nas sessões de trabalho classificámos as várias estratégias usadas pelos alunos, à semelhança do que tinha sido feito para outras aulas, tendo em vista promover a discussão dos processos de resolução/estratégias utilizadas. Maria geriu a tarefa optando por colocar no quadro as respostas que ela escolheu previamente em casa, solicitando a participação dos alunos que queria ouvir, como o seguinte episódio salienta:

Maria: (...) A Elsa fez assim [A tabela de dupla entrada que desenhou no quadro].

Eu sei que a Amélia fez a enumeração, não foi querida?

Aluna: AB, BA, AC, CA...

Maria: AB, BA, e depois, AC, CA, não foi?

Aluna: Sim. E BC, CB. Mas aí, por exemplo...

Maria: Não diga! Depois, a seguir, o Pedro fez uma árvore, não foi? Deixe-me passar. Ora bem, vamos tentar perceber o que é que diz a pergunta. A pergunta diz assim: “Formar um grupo de pessoas para participarem num concurso”. Imaginemos que aqui eu vou escolher três alunos para participarem no concurso. E eu hoje, por exemplo, escolho um; daqui a dois dias, pensei, e já escolhi o outro; daqui a três dias ou quatro escolho o terceiro. Então tenho os três participantes para o concurso. Fez alguma referência para escolher diferentes?

Aluna: Não.

Em vez de incentivar os alunos a debater o problema, encorajá-los a falar e a ouvir os colegas a responder, a argumentar, Maria explicou tudo, sem questionar os raciocínios usados em cada caso nem suscitar possíveis dúvidas dos alunos. A professora limitou-se a corrigir o que estava errado em cada caso, deixando ao aluno o papel de assimilador de saberes já feitos.

Maria: Ou seja, para mim, se foi a Filipa, a Elsa e a Cristina, tanto faz ter escolhido primeiro a Filipa, como depois a Elsa, como depois a Cristina. O grupo é da Filipa, da Elsa e da Cristina, não interessa... Quer dizer, grupo Filipa, Elsa e Cristina é o mesmo grupo que Cristina, Filipa e Elsa. Toda a gente concorda. Vamos olhar para a tabela da Elsa. Havia logo uma incongruência nítida na tabela. Porquê? Se ela fez a tabela: o 'AA', o 'BB' e o 'CC', e se eu subtraísse também dá seis como dá aos restantes. A Cristina fez da seguinte forma, explique-nos porque é que escreveu assim.

A professora colocou uma questão, que à partida seria pertinente, pois solicitou a explicação da aluna sobre o porquê da sua resposta. Contudo, quando a aluna inicia a resposta, Maria interrompeu-a, acabando por ela própria responder à questão.

Cristina: Porque ser o Abel...Porque ser a Berta e Carla ou ser a Carla ou a Berta...

Maria: Porque ao escolhê-los, não é, não estou a definir que eles vão ter uma função diferenciada. Por exemplo, um era delegado e o outro era subdelegado, aí tem importância a ordem. Um é para ir representar a turma no Conselho dos delegados de turma, e outro é para representar no conselho geral da escola, isso faz diferença, não é? Eu escolhi um grupo, sem posições diferenciadas, não é?

Como foi aludido anteriormente, sem explorar as ideias dos alunos, a professora interpretou e explicou o que eles fizeram, retirando-lhes a oportunidade de apresentarem e justificarem as suas formas de resolução. Este tipo de interacção desenvolvida não permitiu à professora obter informação acerca da apropriação, feita pelos seus alunos, sobre os assuntos abordados em aulas anteriores.

No seguinte episódio da aula verifica-se, mais uma vez, que a professora tenta dissuadir os alunos de fazerem uso de estratégias mais intuitivas, como o *diagrama de árvore*. Por outro lado, é de salientar o facto de a professora questionar determinados alunos, nomeadamente a Salete, que era uma aluna que estava a repetir o 12.º ano. Salete conhecia a resposta correcta que interessava à professora naquele momento, possibilitando à docente a condução da aula sem percalços.

Maria: (...) 'E porque é que cometemos este erro?'. Porque ao ler não interpretaram que não interessava a ordem de escolha, não é? A Cristina percebeu logo de imediato que, ao ler o enunciado...

Cristina: Eu percebi bem, mas...

Maria: Pois, ou seja, achou que se escolher a Anita e a Carol era a mesma coisa que a Carol e Anita. Digam-me uma coisa, se vocês pudessem raciocinar, sem ser a fazer como a Cristina, a enumeração ou uma tabela ou árvore, será...

Aluna: Arranjos de três, dois a dois?

Maria: Arranjos de três, dois a dois. Oh Salete, ora diga, querida. Porque é que não pode ser os arranjos?

Salete: Porque interessa a ordem.

Maria: Porque nos arranjos interessa a ordem. Eu escolher a Cristina e a Filipa é diferente de eu escolher a Filipa e a Cristina, não é? Se eu trocar as fotografias vão ficar fotografias diferentes. Ao escolher grupos, comissões, não interessa a ordem.

Neste diálogo verificou-se que os alunos apresentaram dificuldades em identificar que a ordem de disposição dos elementos era irrelevante, como várias investigações efectuadas também confirmam.

Através de um questionamento orientado pela professora chegou-se à generalização. André, o seu melhor aluno, chegou à fórmula da operação das combinações a partir das permutações.

André: Oh professora, não é assim. Porque nós aí íamos pôr três factorial sobre um factorial $\left[\frac{3!}{1!} \right]$. É isso que nós queríamos fazer. E depois vezes o 2.

Maria: Ah!

João: Foi o que eu disse, professora. Mas a professora não quis ouvir.

Maria: Três factorial sobre um factorial vezes dois factorial $\left[\frac{3!}{1!2!} \right]$.

André: Não, professora. É três factorial a dividir por um factorial vezes dois

Maria: Dois ou dois factorial [2!]?

Aluno: Dois.

No diálogo apresentado, constata-se que Maria valorizou a intervenção de André, como mais tarde ela própria admitiu, em detrimento da de João, aluno de fraco aproveitamento: “Mas a professora não quis ouvir”. Também podemos verificar que a professora não explorou os significados de 2! e 2. Na sequência do diálogo apresentado anteriormente:

André: É $(n - 2)!$ Porquê? Porque são duas pessoas que se querem...

Maria: Ah! Fizeram assim: n , é a numeração, é?

André: Sim.

Maria: A dividir...

André: Por $n - 2$.

Maria: Por $(n - 2)!$

André: Ao valor que tem em cima, só que pode ser...

Maria: Ou seja, dividem pelas pessoas que não lhes interessa, não é? Mas depois ainda há o caso destas duas pessoas, elas permutarem entre si.

André: Por isso....

Maria: Por isso é que eles chegaram aqui e dividiram por dois. Portanto, ficava

$$\left[\frac{n!}{(n-2)!2!} \right].$$

De seguida, os alunos generalizaram com muita facilidade: $\left[C_p^n = \frac{n!}{(n-p)!p!} \right].$

O uso de fórmulas na resolução de exercícios foi considerável, foi a partir delas $\left[\frac{5!}{2!3!} = \frac{5!}{3!2!} \right]$ que se chegou à fórmula $[C_2^5 = C_3^5]$, confirmando-se, desta forma, a igualdade dos resultados obtidos nas questões 4b) e 4d). Maria explorou ainda as questões do teste de modo a chegaram também à generalização de que: $\left[C_{n-p}^n = \frac{n!}{p!(n-p)!} \right].$

Contudo, Maria não questionou os alunos nem ela própria atribuiu qualquer significado à igualdade $C_2^5 = C_3^5$, que poderia ser interpretada como o número de maneiras possíveis de escolher duas pessoas entre cinco para participarem num concurso, que é igual ao número de maneiras de escolher três pessoas de entre as cinco que não participaram no concurso.

Seguidamente, a professora propôs aos alunos que inventassem um problema com duas alíneas, relacionado com o assunto, e que tivessem a mesma solução. Através do “jogo” das fórmulas, Amélia considerou grupos de quatro alunos em dez disponíveis e a professora escreveu no quadro $\left[\frac{10!}{4!6!} = \frac{10!}{6!4!} \right]$. Maria só ouviu esta resposta e não questionou outros alunos sobre se concordavam ou acerca de outras respostas possíveis.

Tarefas de desenvolvimento. Usando “materiais”, os sapatinhos do seu filho, Maria introduziu um novo conceito, “permutações com repetição”. Em sua opinião, a utilização destes recursos facilitam a construção dos conceitos com compreensão, tendo-se verificado que os alunos realizaram aprendizagens significativas, sem se des centraram dos objectivos pretendidos. De seguida, procedeu-se à exemplificação e à resolução de exercícios.

Como tinha sido estabelecido nas sessões de planificação, Maria seleccionou o exercício 6, da Ficha 1 – Considerar 12 pontos, 8 sobre uma recta e 4 sobre outra recta estritamente paralela à primeira. De quantas maneiras podemos traçar segmentos de recta com uma extremidade numa recta e a outra extremidade na outra recta? – e resolveu-o novamente, apresentando aos alunos duas estratégias de resolução. Durante a resolução, Maria estimulou

os alunos a procurarem processos alternativos de resolução, o que é importante na medida em que há alunos que poderão identificar-se e adaptar-se melhor a um processo e outros que apropriam com mais facilidade a partir de outros processos. Os exercícios propostos no guião não foram todos resolvidos durante os 90 minutos disponíveis, passando os não resolvidos para a aula extra a implementar a seguir.

Reflexão

Maria na Sessão 10 fez uma reflexão geral sobre todo o trabalho realizado, achando que, de uma forma geral, para que se implementassem todas as tarefas como tínhamos inicialmente pensado nas sessões e mesmo informalmente, teríamos que disponibilizar o dobro do tempo que estava contemplado na planificação. Achou também que, apesar de no início até considerar que seria interessante fazer o levantamento das estratégias usadas pelos alunos antes da instrução e discuti-las na sala de aula, de forma a suscitar o confronto de ideias entre os alunos, neste momento considerou que os seus alunos não achariam pertinente conhecerem os raciocínios dos outros, e sobretudo os raciocínios incorrectos, pois, na sua perspectiva, devem ser premiadas as respostas correctas. Maria frisou várias vezes que os alunos precisam de resolver muitos problemas em vários contextos, enquanto Bárbara insistia na ideia de que os professores resolviam exercícios rotineiros com vista à preparação dos alunos para os testes intermédios e os exames.

Nesta sessão desencadeou-se um diálogo interessante entre as participantes acerca da apropriação da operação combinatória pelos alunos:

Maria: Compreenderam porque partiram, na minha opinião, partiram das permutações para os arranjos, se fosse ao contrário eu não achava... Eu hoje acho que não era tão nítida a percepção, porque...

Bárbara: Ao contrário como, se tivesses dado arranjos simples primeiro, antes das permutações?

Maria: Antes das permutações. Eu acho que eles não teriam concluído tão facilmente, porque eles fizeram um raciocínio muito construtivo. Eles partiram das permutações, e aí permutavam tudo, as permutações eram todas. Depois, se não interessasse permutavam 'x'. Eles estão a partir de um caso geral e estão a reduzir cada vez mais as possibilidades, o que para eles foi muito mais fácil do que partir de um caso particular e cada vez vão acrescentando situações. (Sessão 10)

Para Maria o ter implementado uma aula extra, onde os alunos resolveram exercícios de simplificação de expressões que envolviam factoriais, foi positivo, na medida em que influenciou a compreensão da operação combinações, mas considerou que não tinha induzido o tipo de

abordagem feita nesta aula, pois eles compreenderam sem cálculos; na sua perspectiva, usar a fórmula da operação é diferente de escrever o produto, como se verifica a seguir:

Bárbara: Mas também porque tu fizeste uma aula com bastantes exercícios de cálculo, não é?

Maria: Pois, eles também trabalharam. É assim, quando fiz os exercícios das permutações, nós fazíamos as simplificações das expressões, ou seja, por exemplo, $\frac{n!}{(n-2)!}$, e eles próprios escreveram logo o produto e simplificaram. Ao simplificar

perceberam logo que ia dar a mesma coisa, não é? Quando escolhiam 10×9 , seria a mesma coisa que escrever o $10!$ sobre o $8!$. Eles próprios disseram. Ou seja, noutro problema eles perceberam porque também trabalharam, ou seja, isso comprova que não pode ser associado, acho eu, eles compreenderam sem cálculo. Sem cálculo nenhum. Tanto que eles hoje, antes do teste, até faziam cálculo de probabilidades com técnicas de contagem sem usar as fórmulas. Escreviam como produtos. Quer dizer que não ficaram presos à fórmula. No entanto, entenderam o conceito. Se eu tivesse dado dos arranjos simples para as permutações nunca dei, não é? Não sei, hoje não sei se seria assim tão fácil. Eles compreenderam bem esta sequência assim, tanto que eles chegaram às combinações e conseguiram perfeitamente compreender combinações de cinco, dois a dois; de cinco, três a três, que o produto era comutativo, depois, o significado que ter duas amarelas e ter três vermelhas é a mesma coisa que estarem as duas amarelas e as três vermelhas. Perceberam isso na perfeição.

Bárbara: Porque estavam agarrados também à fórmula, viram que...

Maria: Perceberam que o quociente era aquele e então perceberam logo: 'aí, aqueles são aqueles que sobram, os que sobram não interessa que permutem'.

Margarida, que só teve acesso à transcrição, porque não assistiu à aula, viria a adoptar uma abordagem diferente, aquela que desenhamos nas sessões de planificação, recorrendo à adaptação que fizemos da sugestão de DeGuire (1991).

Margarida: Mas quando tu começaste pelas permutações, ou seja, deste muita importância às trocas dos elementos de um dado conjunto, não se põe em causa se fosse escolher alguma coisa. Estava tudo assumido. E depois, nos arranjos simples, acabaste por eliminar alguns.

Maria: Exactamente.

Margarida: Nós, que demos os arranjos completos, os arranjos simples não vão entrar directamente com o sentido de permutação, mas vão restringir ligados aos arranjos incompletos. Que acaba, se calhar, por ter de explorar um bocadinho a situação ou até das próprias árvores [diagrama de árvore], não é? É que elas [são tão ricas]... vem tudo daí. Agora vamos ver no fim a relação que tudo isto vai fazer e que contribuições é que vai ter.

Bárbara: Mas também foi muito interessante, tu quando deste os arranjos completos, os teus alunos chegaram logo aos arranjos simples.

Margarida: Pois chegaram.

Maria: Pois, porque eles perceberam que não se repetia.

Bárbara: Eles chegaram lá muito bem: $A_2^n - n$. (Sessão 10)

Margarida valorizou o facto de se considerar o tipo de elementos a utilizar, os números, como sendo os elementos mais acessíveis e significativos para os alunos, pois eles estão habituados a operar com números diariamente, sendo-lhes portanto mais familiares do que trabalhar com objectos ou pessoas. Explicou que os alunos tinham conseguido perceber com compreensão a passagem dos arranjos completos para os simples, que tinha sido um processo imediato, mas no passar para as combinações admitiu que será um pouco mais difícil. Esta conversa permitiu a Margarida reflectir criticamente acerca do desempenho da colega e dela própria, antevendo a sua aula e os problemas que possivelmente poderiam surgir, procurando insistentemente respostas para possíveis situações imprevistas no sentido de melhorar a intervenção na sua acção.

Margarida: Ou seja, no fundo, este tipo de situações como são muito intuitivas, e trabalhando com números, para eles são imediatas. Trabalhando com números.

Bárbara: É mais fácil.

Margarida: Porque trabalhando com situações fora do contexto...

Maria: Exactamente. Tem que ser situações que eles possam viver na realidade. Isso atribui um significado muito especial, não é?

Margarida: O facto de ter, por exemplo, os números que tinha: o 1, o 2, o 3, e tu dizes 11, 12... pronto, todos os números que podes formar, quando nós não podemos repetir, para eles é imediato que na segunda posição já fica menos um, e já sabem até de antemão quais são os elementos que vão sair. Agora, a passagem, realmente, para as combinações... eu entendo a tua lógica. Porque eu estou a dizer assim: trabalhaste as permutações, deste muita ênfase ao cálculo e, não sei, eventualmente, relacionar depois logo o cálculo com os problemas em que eles vêem a troca. Quando passa para aqui, seguiste uma lógica que eu acho muito interessante, que foi: tirei 'x', estes não trocam. Relacionaste com 'trocam tudo', mas eu agora afinal não quero aqueles, eles chegaram à fórmula.

Maria: Claro.

Margarida: Pronto, e é interessante. Agora vamos ver se o que estamos a fazer se também leva ou não. (Sessão 10)

Maria não colocou os alunos em grupo, como definido aquando do trabalho de planificação, possibilitando-lhes que, em conjunto, tentassem descrever e explicar os processos de resolução, pois ao fazê-lo, desenvolviam capacidades de ordem superior. Constatou-se ainda que durante toda a aula nenhum aluno foi ao quadro.

Triângulo de Pascal

A tarefa implementada, tendo como objectivo a descoberta do triângulo de Pascal (Anexo III) pelos alunos, centrou-se bastante na professora, apesar de os alunos estarem organizados em grupos. Depois de Maria ler em voz alta o enunciado, explicou:

Então tenho o quê? Tenho cinco caixinhas e três bolas, não é! Quer dizer que a primeira tem a letra C, a outra não tem, tem um S, a outra tem C, a outra tem C, e a outra não tem C, tem S. No entanto, vocês acham que esta é a única disposição possível de pôr as bolas? Não. Então o que é que eu quero que façam? Eu quero que investiguem todas as posições possíveis, todas as formas de distribuir as três bolas, uma em cada caixa, só uma em cada caixa, por essas cinco caixas, sim? Podem começar. (Aula 23/10/08)

Todas as questões postas pela docente foram bastante encaminhadas, não favorecendo a autonomia nem a discussão entre os alunos nos próprios grupos. Por vezes, colocava uma questão e quase de imediato respondia à mesma, como é ilustrado em cima. Maria concretizou o que se tinha proposto leccionar, tomando novamente o 2.º problema da Ficha 2 e resolveu-o com os alunos, utilizando outro processo. Esta abordagem foi feita no contexto do triângulo de Pascal, como tínhamos pensado inicialmente, na sessão em que elaborámos a ficha de trabalho 2, e quando posteriormente reflectimos sobre a sua implementação, achámos pertinente fazê-lo, visto este se ter apresentado muito difícil para os alunos, como Maria expressou: “era um problema de enunciado de grau de dificuldade acima do habitual” (Sessão 7) – Os dois processos de resolução apresentados foram:

$A_4^2 = 2^4 = 16$, em que $16 = 1 + 4 + 6 + 4 + 1$ é a decomposição da potência 2^4 na soma dos números da 4.ª linha do triângulo de Pascal.

A distribuição de 0 meninas num quarto e 4 no outro, 1 num quarto e 3 no outro, 2 num quarto e 2 no outro, 3 num quarto e 1 no outro e 4 num quarto e 0 no outro, recorrendo, de seguida, à operação de combinações, obtendo-se $C_0^4 + C_1^4 + C_2^4 + C_3^4 + C_4^4$.

Na opinião da professora, com a sua orientação e questionamento, os alunos terão compreendido a construção do triângulo e as suas propriedades.

Perante uma situação de dúvida, como a que se descreve no seguinte extracto, Maria devolveu a questão ao mesmo aluno, desafiando-o a reflectir sobre o assunto e fazendo uma tentativa de levá-lo a identificar limitações no seu raciocínio. Deste modo, a professora procurava ouvir os alunos e desafiá-los, criando momentos de discussão na turma. Contudo, perante as

contribuições dos alunos, como era frequente nas suas aulas, ela tomava a palavra e corrigia ou completava as respostas que estes apresentavam.

Maria: Combinações de cinco três a três. Não entendi porquê.

Aluno 1: Eu também não.

Maria: Quero que explique.

Aluno 1: Temos cinco caixas, logo dá para pôr na primeira, mas como existem três ocupadas e vão ficar duas desocupadas, $3! \times 2!$.

Maria: Ou seja, tem cinco caixas, é isso? Então seriam $5!$ formas de colocar as cinco.

Aluno 1: Só temos três bolas, tínhamos cinco [caixas], pomos $3!$, que é para pôr as bolas, depois eram as duas caixas vazias.

Maria: O $5!$ seria as permutações diferentes das caixas. Mas porque é que têm que dividir, porque é que sentem a necessidade de dividir pelo $3!$ e pelo $2!$?

Aluno 2: Que é para não repetir. Porque as caixas não estão todas ocupadas.

Maria: As caixas não estão todas ocupadas. E quantas são as que ficam vazias?

Alunos: Duas.

Maria: E aqui interessa-me ter, esta ou esta? Quando ficam duas vazias?

Alunos: Não interessa a ordem.

Maria tentou fazer uma pequena síntese do que se estava a tratar, questionando e respondendo logo de seguida, deixando que os alunos em coro completassem a frase para reforçar a interacção mantida através do diálogo desencadeado.

Enquanto decorria a resolução da actividade, a professora entendeu que seria pertinente recordar um problema que tinha sido trabalhado em aulas anteriores. Dando continuidade ao diálogo mantido, lembrou que o género de raciocínio que estavam a desenvolver era semelhante ao utilizado no problema dos “caminhos”, pois o tipo de configurações produzidas na codificação sugeria precisamente a sua aplicabilidade a este tipo de problemas. Maria tentou dar oportunidade aos alunos para eles estabelecerem as analogias supostas, através de um questionamento apropriado.

Maria: Então, vocês vão tirar à permutação das caixas, não é? Então dividiram pelas permutações das duas. E depois porque é que sentiram também a necessidade de dividir... Não interessa a ordem, porquê? Porque as caixas são...

Alunos: Iguais.

Maria: Sim, Filipinha? Vamos lá recordar os caminhos. Lembram-se de... Imaginemos que eu tenho isto...

Aluna: Eu lembrava-me dos caminhos.

Maria: Ah, porque é que se lembraram dos caminhos? Está aqui o André e está aqui a escola, e o André quer ir à escola, sim? Porque é que então olhando aqui para esta planta, associamos este problema ao dos caminhos?

Aluna: Porque é lado, lado, lado, cima, cima.

No final da aula, Maria propôs aos alunos que elaborassem uma pequena composição para explicarem a uma pessoa que não conhecesse o triângulo de Pascal o seu processo de construção, as suas propriedades e a sua aplicabilidade. Isso revelou-se produtivo pois Maria exigiu que os alunos verbalizassem os seus pensamentos, usando uma linguagem corrente e matemática cuidadas.

Reflexão

Maria saiu satisfeita da aula e, na sessão de reflexão, considerou adequada a forma como a tarefa foi desenvolvida, apresentada sob a forma de ficha e orientada sequencialmente com um formato e estrutura que, na sua perspectiva, contribuiu para que os alunos fizessem uma aprendizagem significativa.

Até acho que foi a tarefa mais rápida para eles perceberem um objectivo, de todas as que fizemos. Porquê? Porque o facto de fazermos uma sequência muito definida do trabalho, não é? Havia um encadeamento do que se fazia num ponto, depois o que se fazia no outro (Sessão 11)

Considerou ainda que os alunos chegaram aos objectivos a que se tinha proposto, e com entusiasmo comentou: “E compreenderam tão bem... Por exemplo, não foi preciso dar as propriedades todas exaustivamente porque eles próprios conseguiram intuitivamente chegar às propriedades, não é?” (Sessão 11). Maria atribuiu o sucesso da aula ao “facto de terem trabalhado muito antes nas combinações. Porque eles já sabiam que $C_2^5 = C_3^5$ ”. Achou ainda significativo proporcionar aos seus alunos momentos em que estes reutilizaram conceitos apreendidos em novos contextos, pois, por um lado, contribuiu para estabelecer relações entre as ideias combinatórias, e, por outro, promoveu a consolidação de conhecimentos.

Tínhamos trabalhado nas combinações, as situações das plantas, deles se deslocarem, fizeram com que eles conseguissem fazer a associação de poderem usar nas duas situações. Quer dizer, na distribuição das bolas e nas plantas, não é? Quer dizer, conseguiram atribuir um significado para o triângulo de Pascal. Não viram o triângulo de Pascal como um conjunto de números. (Sessão 11)

Acerca do mesmo assunto, de considerar que as “combinações” foram bastante trabalhadas pelos alunos, tanto em casa como nas aulas, e de constituírem pré-requisitos imprescindíveis ao estudo do “triângulo de Pascal”, surgiu então o seguinte diálogo entre as participantes e a investigadora:

Bárbara: E aquele problema que até foi o André que respondeu, lembras-te? Combinações de 10, 2 a 2; combinações de 10, 8 a 8 [Fernandes, 1990].

Maria: Pois. Mas eles têm essa noção. Eu acho que, efectivamente, trabalharam tão bem por causa das combinações, não é? Não foi só...

Margarida: Eu, por acaso, eu estou-te a ouvir e tu relacionas muita a combinação com a expressão que usas para o cálculo da combinação. Porque tu associas essa fórmula ao raciocínio. Porque eu estou... Eu fiz um exercício numa ficha, que até era escolher uns livros. Tinhas cinco livros e escolhias três.

Maria: Pois.

Margarida: Ou então... Escolhias três para levar, ou correspondia ao mesmo que escolher dois.

Maria: Exacto, para ficar.

Margarida: E eu lembro-me de falar sobre isso, e só a palavra ‘escolher’ e a situação em si, se eu associar depois a uma letra, e com dois índices, para eles tem que ser imediato. Mesmo sem saber que aquilo dá factorial, não sei quê, não sei quantos. (Sessão 11)

Maria frisou, lamentando que: “Se nós formos ao livro do GAVE todas as questões relacionadas com triângulo de Pascal, são todas de utilização, exclusivamente, das propriedades, não é? Eles não precisam de ter outro raciocínio para além do conhecimento do triângulo de Pascal”.

Esta docente defendia a realização de trabalho de grupo pelos alunos, salientando insistentemente que era prática nas suas aulas, visto a disposição física das mesas, em fila horizontal, ser a mais correcta, pois provocava uma predisposição natural que permitia aos alunos a troca de ideias entre eles.

Até porque é assim, a turma é muito pequenina, e o facto de eles estarem todos em fila e não assim [em mesas de dois], faz com que possam trabalhar diariamente três. Por exemplo, a Elsa trabalha sempre com a Cristina e com a Filipa. (Entrevista final)

Embora Maria tenha aceitado o desafio de colocar os seus alunos “fisicamente em grupo”, em grupos de quatro elementos, mais tarde comentou que isso não trouxe qualquer vantagem. Esta docente sustentava que a sua intervenção era de todo necessária, substituindo-se aos alunos constantemente, quer na elaboração de conclusões, na formulação de sínteses ou no esclarecimento de dúvidas. Com esta atitude, ela consolidou a sua autoridade e a dependência dos alunos em relação à professora.

Bárbara: Olha, mas tu não achas que podias, sei lá, valorizar mais o facto de eles estarem em grupo e deixá-los trabalhar mais autonomamente?

Maria: Autonomamente como? Dei sempre tempo para eles fazerem, e depois questioneei grupo a grupo. E se não fosse assim?

Bárbara: Dar mais tempo para eles explorarem, registarem conclusões, discutirem e apresentarem no quadro em vez de seres tu a apresentar, por exemplo.

Maria: Ir um aluno?

Bárbara: Um aluno, o porta-voz do grupo. A Margarida costuma fazer assim.

Maria: Ora bem, então da aula de triângulo de Pascal não dava para fazer aquela exploração, porque foram 90m. As conclusões foram na outra parte, e os exercícios foram resolvidos na outra. A planificação dizia duas aulas.

Bárbara: Exacto.

Maria: Se não fosse assim, nem em duas aulas era possível. Porque, enquanto vai um escrever... O quadro é só um, não é? Não podem dois estar simultaneamente neste quadro. (...)

Bárbara: Mas, por exemplo, um escrevia e o outro, o porta-voz do outro grupo, podia dar uma achega, completava aquele raciocínio.

Maria: Mas tu achas que traz alguma vantagem acrescida do que perguntar a cada um o que é que pensou?

Bárbara: Isso foi o que eu te perguntei.

Maria: Eu acho que não trouxe. Para além de que eu acho que a perda de tempo não traz essa vantagem. Perguntei a um e a outro, registei no quadro, quantos grupos deram esta... não é? Não sei. Só experimentando. É assim, há aqui um contingente, não é? (...) Dia 10 temos um teste intermédio com toda a matéria de probabilidades. (Sessão 11)

Margarida pronunciou-se, perspectivando a sua actuação e propondo uma alternativa aos constrangimentos apontados por Maria, nomeadamente no que concerne à resolução de exercícios e procedimentos rotineiros.

Margarida: A questão é a seguinte: as nossas actividades são enriquecedoras, possivelmente a haver cortes, esses cortes serão no tipo de exercícios que praticam.

Maria: Menos exercícios.

Margarida: Menos exercícios, ou seja, ainda hoje estivemos a resolver a ficha e se reparares existem exercícios que nós fazemos e que acabam por ser iguais (...). (Sessão 11)

Maria manteve sempre a convicção de que o que fazia e como fazia estava muito bem. Perante as questões postas por Margarida, quanto à alteração significativa de estratégias de ensino, Maria respondeu que não mudaria nada, poderia dar mais tempo aos alunos para trabalharem em grupo, mas isso acarretava outro tipo de constrangimento, os diferentes ritmos de aprendizagem.

Maria: Se eu fazia de forma diferente alguma coisa?

Margarida: Não. Imagina que tinhas, por exemplo, mais blocos, já estavam planificados. Obviamente que o tempo que tu deste para eles trabalharem em grupo poderia, eventualmente, ser mais longo.

Maria: Mas tu reparaste, Margarida, que eu estava à espera da pergunta 1 e havia grupos que já estavam na 3? (Sessão 11)

Margarida, com os anos de prática que possui e com o que já experienciou, achou este problema natural e frequente; porém, não o considerava inibidor do plano de acção e das intenções traçadas pelo professor, nem da aprendizagem dos alunos, apresentando uma alternativa à prática de Maria, com vista a superar essa dificuldade.

Margarida: Mas isso é uma coisa que também acontece... Isso tem aspectos positivos, mas também acho que tem aspectos negativos, porque muitas vezes os alunos, o outro tem uma questão, ele até pode já ter percebido, mas podia ter curiosidade em saber como é que o outro pensou e se pensou mal, o que é que o outro entretanto confundiu, isso também serve de lição.

Maria: Mas eu deixo que ele acabe, não deixo é que fiquem sem fazer nada. (...) Se não vou corrigir enquanto não acabar, aquele não tem mais nada para fazer. (...) Eles valorizam a aula pelo trabalho que fazem na aula, já fez aquele trabalho mas não tem nada para fazer, é desmotivador para os meus alunos. Isso é a mesma coisa que eu dar a matéria toda até Maio e vou-me embora. (Sessão 11)

Toda a informação adquirida por Maria até esta sessão não a levou a pôr em causa as suas práticas, o seu comportamento, as suas atitudes e postura na sala de aula, pois apenas tinha assistido a uma aula de Margarida.

Como nas sessões se praticava uma partilha de dificuldades da prática, na tentativa de encontrar possíveis soluções ou então procurando alternativas ao que tinha sido realizado, Margarida questionou as colegas acerca de uma dúvida que os alunos usualmente expõem e sentem, desencadeando-se a seguinte discussão:

Margarida: Porquê dividir? Porque eles perguntaram: 'porque não subtrair?'

Maria: Ah, mas os meus perceberam que era dividir, porquê? Porque ao perguntar era para fazer um produto. Se eu estou a fazer um produto, se eu quero que estes permutem com estes, eu estou a fazer uma simplificação da expressão. Para fazer a simplificação eu tenho que dividir, não posso...

Bárbara: Porque praticaram antes, naquela aula, a simplificação de fórmulas.

Maria: Lá está, por isso é que eles disseram logo... Porque eles também perguntaram: 'porque é que não subtraio'; não é?

Margarida: Eu expliquei porque este valor tem a ver também com o número de sequências. Aqui vai aparecer o número de sequências múltiplas, ou seja, eu tenho duas vezes mais do que aquelas que pretendo.

Maria: Pois.

Margarida: E eles fizeram-me essa pergunta, e eu pensei: 'bem, mas...', lá lhes expliquei, mas fiquei na dúvida: 'como é que os da Maria conseguiram com tanta facilidade isto'. Eu não trabalhei muito factoriais. (...) Por exemplo, três. Três pessoas numa mesa redonda, não numerada; o número de situações possíveis pode ser dois, porque é o $2!$ Então a explicação que eu tinha, e porque já tinha dado noutro ano, era exactamente fazer todas as hipóteses e depois chegavam à conclusão que o a , o b ou o c dava exactamente a mesma coisa. Neste caso era três, o triplo.

Binómio de Newton

Os alunos trabalharam individualmente um conjunto de tarefas, entregues a cada um em formato de papel. O desenvolvimento da acção ocorreu dentro dos mesmos moldes da aula anterior e a organização da sala era a habitual. Foi através de um diálogo desencadeado por sucessivas questões formuladas na ficha (Anexo III) e pela professora que os alunos chegaram à generalização do desenvolvimento do binómio de Newton.

Relativamente à interacção desenvolvida por todos os intervenientes na resolução das tarefas apresentadas na ficha, o papel da professora pautou-se pela orientação, através de questões, incentivando-os ao trabalho. Todo o questionamento levado a cabo pela docente foi bastante orientado, não promovendo a autonomia nem a exploração das ideias e opiniões dos alunos através da discussão. Por vezes, a professora colocava questões a que respondia de imediato, como era habitual.

Nesta aula, Maria entendeu que era necessário recordar o conceito de “potência”, o desenvolvimento dos “casos notáveis”, conceitos pouco presentes, e tentou dar oportunidade aos alunos para eles o fazerem.

Maria: Lado vezes lado. Vocês disseram-me que o lado do cubo da Maria era $a + b$, então é $(a + b)^2$. Sabem escrever duma forma mais simplificada, não sabem?

Alunos: $a^2 + 2ab + b^2$.

Maria: Desenvolvimento do quadrado. Então, quantos termos vos deu esta expressão simplificada?

Aluna: Três. (Aula 28/10/08)

As tarefas desenvolvidas proporcionaram vários contextos para os alunos chegarem à generalização e, através dos mesmos procedimentos, chegaram ao desenvolvimento do termo geral. De seguida, resolveram-se exercícios de consolidação do manual.

Reflexão

Relativamente à aplicação da ficha que integrava o conjunto de tarefas a implementar, Maria sustentou:

eu acho que funcionou muito bem, porque eles já estavam muito familiarizados com a linguagem de probabilidade de um acontecimento. Ou seja, para eles, os casos favoráveis e os casos possíveis, a Lei de Laplace, já sabiam muito bem, essa competência já dominavam na perfeição. (Sessão 13)

Maria observou dificuldades dos alunos no desenvolvimento do binómio de Newton, atribuindo-as às dificuldades que estes apresentam em trabalhar com potências.

Perceberam, mas acham que é difícil. Porquê? Porque não sabem efectivamente trabalhar bem o cálculo de potências. Se a potência for quarenta, eles não vão escrever o desenvolvimento todo, e quando nós começamos a colocar questões sobre termos ou características de termos, para isso já se exige uma capacidade de abstracção muito maior, em que eles têm mais dificuldades. (Sessão 13)

Na planificação estava prevista apenas uma aula, que Maria achou insuficiente, acabando por dar outra aula sobre o assunto para consolidação.

Maria: Dei uma, mas já fiz outra de exercícios depois do teste. No teste só saiu uma pergunta de escolha múltipla do 'binómio de Newton'.

Bárbara: Porquê? Achaste que eles não estavam...

Maria: Precisam, efectivamente, de trabalhar mais, porque eles não sabem as regras de cálculo de potências. A notação científica, não sabem. (Sessão 13)

Este assunto foi referenciado nas sessões de planificação como não tendo uma importância muito grande, pelo facto de ser um conteúdo que saiu nos exames com pouca frequência e o tipo de questões contempladas serem directas. Maria acrescentou ainda:

também se formos a ler o programa, o programa diz que os alunos terão que ser capazes de fazer o desenvolvimento do binómio; compreender relações entre um binómio e uma expressão mais simplificada, percebendo se são superiores ou não, observando e analisando alguns termos. Então isso deixa de ter qualquer tipo interesse, não é? (Sessão 13).

4.2.3 Conhecimento didáctico

Conhecimento do conteúdo

Domínio do conteúdo. Maria foi sempre uma aluna muito empenhada durante o seu percurso escolar, mas a sua aprendizagem da Combinatória não foi significativa, atribuindo este facto ao tipo de ensino que os seus professores ministraram, um ensino tradicional.

Acho que a grande dificuldade dos alunos neste conteúdo específico parte da grande dificuldade que os professores têm em utilizar estratégias adequadas, para eles poderem aprender. Porque efectivamente, nós não aprendemos de forma consistente o conteúdo, para hoje podermos ter amadurecido as novas estratégias para poder explicá-lo. (Entrevista inicial)

Para além de sentir dificuldades na aprendizagem deste tema, também teve dificuldades em o leccionar pela primeira vez: “No primeiro ano que leccionei, também senti muitas dificuldades, claro” (Entrevista inicial). Esta professora, hoje, tem a consciência que deve preparar muito bem as aulas e arranjar as melhores estratégias para veicular uma aprendizagem com compreensão: “Tenho a preocupação, quando dou este tema aos meus alunos, de tentar

motivá-los e usar estratégias de forma a eles perceberem. Porque, efectivamente, a Combinatória é perceber” (Entrevista inicial).

Maria é da opinião que a insegurança que um professor sente relativamente a um dado assunto se transfere para os alunos, pois se a sua concepção sobre a Combinatória é considerá-la difícil, será presumível que os alunos também a achem difícil: “Se eles [os professores] já a acham difícil, então também será difícil os alunos acharem muito fácil, porque à partida eles já vão com a ideia, e transmitem a ideia ao aluno de que é difícil.” Esta professora, ao longo dos anos de prática, aprofundou o seu domínio sobre o assunto e, actualmente, durante a prática, demonstrou conhecer e compreender os conceitos a ensinar, elaborando até problemas interessantes que implementou nas suas aulas. No entanto, a sua opinião sobre a dificuldade da Combinatória mantém-se: “Temos que ter essa humildade e essa capacidade de reconhecer que, se o tema para nós não é fácil, devemos trabalhá-lo em conjunto, de forma a bater as dificuldades, não é?” (Entrevista final).

Relativamente às actividades desenvolvidas ao longo do trabalho colaborativo, Maria opinou:

Acho que abriu horizontes completamente diferentes na Combinatória, quer dizer, hoje nós decerto estávamos capazes de fazer um livro, e, quando alguém visse, achava que nós estávamos a pensar noutra Combinatória que não esta, não é? Nós atribuímos um significado, eu acho. O facto de nós nos termos baseado em actividades tão diversificadas, demos um significado à Combinatória que vai muito além do que vem escrito nos manuais. Eu acho que isso foi o mais enriquecedor, no fundo, e que nós vamos levar isso para outras unidades. Eu acho que isso é que foi importante. (Entrevista final)

Natureza e a estrutura do conteúdo. Inicialmente, Maria tinha uma visão redutora e tecnicista sobre a Combinatória; era considerada por ela como um conjunto de técnicas de contagem necessárias, como instrumento útil para a Matemática e para a vida, pois permite contar, de forma ordenada, um número grande de coisas, e, aplicada às Probabilidades, até intervém na elaboração de previsões:

E então a Análise Combinatória seria o desenvolver técnicas de contagens que permitam facilitar, usar estratégias mais adequadas para determinar formas diferentes de organizar conjuntos, formas diferentes de organizar objectos, pronto. Por exemplo, quantos códigos é que podemos ter no multibanco, quantas matrículas é que podemos ter possíveis no nosso País, ou seja, ao fim de quantos anos é que nós teremos de inventar uma nova forma de matrículas dos carros. (Entrevista inicial)

No entanto, esta visão simplista modificou-se ao longo do trabalho que desenvolvemos em conjunto, tornando-se evidente nas conversas travadas informalmente e nas sessões de reflexão que, actualmente, encara a Combinatória como “uma forma de organizar logicamente o pensamento”, revelando:

Eu aprendi a atribuir significados à Combinatória que provavelmente desconhecia sem este trabalho. Nós também aprendemos a pensar ‘combinatoriamente’, nós professores, decerto vencemos barreiras que tínhamos, entraves que criávamos à própria Combinatória ou ao ensino da Combinatória. Aprendemos a pensar e a encarar a Combinatória doutra forma. Não como um conjunto de fórmulas que até poderiam existir na máquina, ou até se podem fazer na máquina, mas como uma forma de pensar, de estruturar o pensamento. E é o desenvolvimento de um pensamento estruturado que eles têm dificuldade em fazer. (Entrevista final)

Quando questionada sobre a utilidade da Combinatória, Maria afirmou:

Eu acho que serve para resolver as situações do dia-a-dia que nós temos, que não basta... com poucos objectos conseguimos resolver a situação imediatamente criando um esquema. A Combinatória permite-nos alargar horizontes e pensar em muitos objectos, em situações muito mais complexas e desenvolver um pensamento muito mais complexo. (Entrevista final)

Assume, desta forma, o quão importante é a Combinatória, pelas suas muitas aplicações, e, sobretudo, porque permite aos alunos desenvolver competências de ordem superior, que actualmente estão consagradas nas orientações curriculares e que são imprescindíveis para o sucesso na aprendizagem de outros conteúdos e da vida. “Claro, ao desenvolver a capacidade de abstracção, não é, vai-nos servir para outros conteúdos. Nós aprendemos a atribuir outros significados, a encontrar outros conteúdos que se interliguem e permitam essa relação” (Entrevista final). Hoje, ela pensa que os alunos “não encaram a Combinatória como uma fórmula ou como um meio para resolverem [problemas]. Encaram a Combinatória como um pensamento” (Entrevista final).

Conhecimento do currículo

A operacionalização das orientações curriculares varia de professor para professor, pois a sua interpretação não é feita por todos da mesma forma. É, pois, importante que se confrontem ideias e opiniões, no sentido de chegar a um entendimento comum e correcto, num contexto de trabalho colaborativo, de modo a legitimar o conteúdo a leccionar pelos vários intervenientes, tendo em conta o ambiente em que se integram, nomeadamente a escola em que trabalham e as características dos seus alunos. Para tal, é necessário seleccionar as tarefas e desenvolvê-las, tendo em conta o cumprimento do currículo e os pressupostos aludidos anteriormente.

Maria sustenta que as estratégias usadas pelos seus professores não foram as melhores e mostra preocupação com a sua actualização em termos do conhecimento do currículo: “eu acho que se vão definindo estratégias novas para os professores, materiais novos, recursos novos que facilitam muito mais, hoje, o que são as práticas educativas” (Entrevista inicial).

Recursos. Quando questionada acerca dos recursos utilizados nas suas aulas, Maria refere: “Nós temos salas bem equipadas, com computadores, um laboratório bem equipado para usar programas adequados, por isso sempre que precisámos de fazer uma aula mais expositiva podemos usar o PowerPoint”. Embora esta professora tenha feito um curso de pós-graduação em Tecnologia Educativa, que lhe forneceu ferramentas para o uso das novas tecnologias na sala de aula, na Combinatória usou materiais mais tradicionais, principalmente o quadro, o giz e o manual adoptado. Maria perspectiva o uso das novas tecnologias em termos da sua eficácia, dizendo:

Sempre que eu ache que o conteúdo se adapta. Eu acho que nada é invencível, e a nova tecnologia não vem substituir o quadro, nem o quadro é sempre melhor do que a nova tecnologia. Tento conciliar o conteúdo e a tarefa que eles vão fazer, ou a forma como eu vou dar a aula, e pensar se aquele recurso é o mais adequado ou não. Não quer dizer que seja sempre muito bom, e se pudesse usava sempre as novas tecnologias ou não. Nas novas tecnologias tento usar muito, quando é para conversões geométricas, porque sem dúvida será mais rigoroso (...), porque se podem projectar diferentes resoluções e eles poderão analisar [simultaneamente]. Seria mais dispendioso em termos de tempo escrever no quadro. (Entrevista inicial)

Esta professora valoriza o uso do manual nas suas aulas, achando contraditório a escola aconselhar a compra de um livro escolar, que fica dispendioso para a família, e depois não fazer uso dele durante as aulas. Consequentemente, Maria fez uso do manual escolar, marcando páginas para leitura em casa ou propondo exercícios de consolidação, sendo ainda mais usado nas aulas extra, onde se resolviam todos os exercícios alusivos ao conteúdo tratado na aula.

Eu acho que também tem que se usar os manuais, porque os manuais são excessivamente caros, quer dizer, o preço é dependente da qualidade, mas hoje tendo em conta o nível das famílias é caro, e não podemos de algum modo impormos aos alunos o manual e agora não o vamos utilizar. (Entrevista inicial)

Maria revelou ser apologista do uso de materiais manipuláveis para “exemplificar com situações concretas, onde eles podem utilizar e onde é fácil para eles começar a perceber o raciocínio”. Considerando uma situação da sala de aula, quando, depois de ter dado a operação combinações, Maria ensinou as permutações com repetição levou, para esse fim, uma série de sapatinhos de seu filho para explicar o conteúdo.

Maria: (...) Eu decidi arrumar os sapatos do meu filho no armário, o que é que acontece? Mas não sabia como é que havia de arrumar. Então, eu tenho uma destas formas, o que é que acontece? Estes são iguais, não são? Isto é uma forma de eu os guardar. Agora eu decidi trocar este com este [sapatos iguais]. Vocês não viram que eu troquei. Vocês chegaram a minha casa e disseram: 'Ui, arrumaste os sapatos? Continuam iguais', 'mas eu não arrumei os sapatos?' Há uma coisa que eu não estou a perceber: Eu arrumei os sapatos! Mas como vocês disseram eu pensei: 'Oh, acharam que eu não arrumei os sapatos'. Pronto, tudo bem. Num dia à noite, eu digo assim: 'Olha, o Tomé esteve a mexer nos sapatos', vocês abrem o armário e dizem: 'Não, não mexeu nada nos sapatos'. Ele não mexeu nos sapatos?

Aluna: Mexeu.

Maria: Só que ele mexeu em que sapatos? E isso são configurações diferentes?

Alunos: Não.

Maria: Não. Eu decidi comprar outros sapatos. Eu cheguei e até me disseram: 'Olha, encontraste o outro, mas precisas de arrumar isso'. E eu fiz assim. Vocês: 'Arrumaste?' Eu durante a tarde cheguei lá e [decido]: 'Eu gosto mais destes, gosto mais destes'. O que é que está a acontecer? Vocês só dão por ela quando eu troco que sapatos?

Alunos: Os diferentes.

Maria: (...) Se eu andar a trocar sempre pares iguais, notam alguma diferença no meu armário? Não, nenhuma. Ou seja, quando há objectos iguais e eu quero saber de quantas formas eu os quero colocar, não interessam as permutações dos iguais. Não me interessam as trocas que eu faço com os iguais. Mas se eu trocasse este com este [sapatos diferentes] já interessa, não interessa? (Aula 16/10/08)

Por analogia com esta situação, os alunos conseguiram, logo de seguida, resolver todos os exercícios do género. Na opinião de Maria, são muito importantes as situações de aprendizagem exploradas aquando da introdução de um conteúdo.

A concretização de situações é muito importante para eles, para além de animar, no fundo, a aula, porque eles gostam, torna-se ainda mais significativo para eles, porque eles estão a concretizar no momento. Eu acho que é assim, no contexto em que eu usei, na introdução do conteúdo, no desenvolvimento de determinadas competências foi muito importante, mas eu acho que chega um ponto em que os temos que abandonar, e eles próprios têm que criar o seu próprio esquema. Nós temos que lhes dar essa liberdade, para não os limitar àquilo que nós pensámos, àquilo que nós queremos. (Entrevista final)

Tarefas. Tendo em conta o seu principal objectivo: “prepará-los melhor para o que hoje são os momentos de avaliação externa”, Maria habitualmente propõe tarefas de ensino orientadas,

em que possa haver ou uma explicação prévia do que vão fazer, tarefas que envolvam, geralmente, esquematização de um raciocínio e não só apenas um cálculo, tarefas que envolvam também composição matemática, ou seja, que eles sejam obrigados a explicar o seu raciocínio, a desenvolver, e usar a calculadora sempre, mas a explicar o raciocínio como utilizaram a calculadora e também os

ajuda a amadurecer a capacidade de dominar, no fundo, a linguagem matemática e a poderem pensar. Ao escreverem pensam melhor no que dizem. (Entrevista inicial)

Os problemas de Combinatória permitem aos alunos relacionarem várias representações e abordagens. É, por isso, importante que o professor proporcione situações nas suas aulas que estimulem o uso do diagrama de árvore, recurso que lhes permite desenvolver o raciocínio recursivo. Embora, algumas vezes, Maria tenha dissuadido os seus alunos de fazerem uso deste recurso didáctico tão poderoso, facilitador e potenciador da generalização, na entrevista final declarou:

Eu acho é que cada aluno faz o seu esquema, e uma tabela é apresentada de cem formas diferentes, porque eles atribuem um significado aos esquemas muito próprios, à sua forma, esquematizam, atribuem letras como eles querem. Eu acho que eles precisam no início dessa âncora, dessa base, porque, claro, não têm o pensamento abstracto do cálculo combinatório tão desenvolvido (...) Eu acho que isto acaba por os acompanhar sempre, se chegarmos aos testes eles fazem os tracinhos, eles fazem a árvore, eles fazem uma tabela, é porque precisam. (Entrevista final)

Na sua prática, constatámos que esta professora propunha problemas que ela criava, relacionados com situações da vida real, elaborava histórias quase reais onde envolvia alunos, que se revelaram muito motivadoras e significativas para eles.

Objectivos. Maria mostrou não ter em conta as recomendações do currículo pela postura, comportamento e atitudes que demonstrou em sala de aula, pois assumiu completamente a orientação de todas as aulas que administrou, orientando todas as tarefas, mesmo as que definimos e assumimos em grupo, não proporcionando aos seus alunos situações de ensino inovadoras, onde era suposto eles assumirem um papel activo e autónomo, chegando sozinhos às conclusões, sem a ajuda da professora, como se exemplifica no diálogo seguinte:

Bárbara: Mas isso mete-te impressão? Por exemplo, pegares no André que é o teu melhor aluno e pô-lo a ajudar um colega que está atrasado.

Maria: E eu?

Bárbara: E assim aproveitas e tu vais para outro sítio...

Maria: Eu tenho 9 alunos. Eles se trabalharem três a três dá três grupos.

Bárbara: Mesmo que não estejam em grupo.

Maria: Mas eles trabalham a pares.

Bárbara: Pronto, o André acabou e tu dizias: 'Oh André, vai ali para junto da Amélia e estejam os dois ali a discutir o assunto'.

Maria: Acho que nunca me aconteceu.

Bárbara: Mas tu não reagias bem a uma coisa destas? Tu é que tiras sempre as dúvidas.

Maria: ‘Como é que fizeste? Quanto é que te deu? Porque é que te deu isso? Como é que fizeste?’

Margarida: O trabalho que tu tens com os alunos, estamos no 12.º ano, portanto, isto já vem desde o 10.º, criou-se um perfil de professor e um perfil de aluno, que neste momento estar a modificar nem se adapta ao professor nem se adapta ao aluno.

Bárbara: Eles gostam de ser orientados pela Maria.

Maria: E querem!

Margarida: Exacto. Ou seja, admiram, sentem confiança no que dizes e valorizam isso. E, portanto, na aula, quer a professora quer os alunos, para eles, tem que levar algo de novo. Significativamente para eles não é por exemplo, avaliar ou estar a ver o raciocínio deste ou daquele, isso já não é significativo para eles. É concretizar uma situação: isto é assim, e a lógica é esta e ponto final. E está percebido e acabou. Por isso, não é no 12.º que se mudam este tipo de situações.

Maria: E agora isso traduz uma melhoria, Margarida? (Sessão 11)

A apropriação que fez das tarefas durante as sessões não sugeria que fossem desvalorizadas na sua implementação em sala de aula, admitindo Maria *a posteriori*: “em relação às estratégias, eu acho que, depois de ter implementado, podia ter implementado muito melhor” (Sessão 12).

A docente assumiu que desenvolveu determinadas rotinas diariamente, inibidoras de práticas inovadoras, por vezes sem ter consciência de que o fazia, e por isso considerando difícil reflectir sobre elas todos os dias, no sentido de as abandonar. Porém, esta intenção foi inibida, pois as sessões realizaram-se num curto intervalo de tempo e o constrangimento do factor tempo e do cumprimento do programa prevaleceram sempre em detrimento da mudança de práticas veiculadoras de situações de ensino que estimulassem o desenvolvimento de capacidades de ordem superior, preconizadas pelas novas orientações curriculares.

Os meus alunos são muito trabalhadores. Isso é uma característica deles que se foi moldando ao longo do tempo e eu sou muito exigente com eles nessa perspectiva. Ou seja, eles têm que crescer, também eles, na responsabilidade da sua própria aprendizagem. Esta capacidade de abstracção também vem muito do trabalho que eles desenvolvem. (Entrevista final)

Esta professora mostrou necessitar de desenvolver uma atitude de maior abertura à inovação e de ser persistente nesta investida, pois o processo não é linear, exige que ponha em causa toda a sua acção, estando constantemente a aprender e a melhorar com a prática lectiva e, conseqüentemente, valorizando a sua transformação por uma causa justa. Maria, numa das sessões referiu que os seus alunos,

valorizam a aula pelo trabalho que fazem na aula. Porque é assim, eu digo: ‘vamos fazer de tal a tal, depois de tal a tal. Quando acabarem, vão continuando a fazer’.

Não consigo vê-los parados sem fazer nada dentro da sala, isso até para o meu sistema nervoso não dá, Margarida. Isso é uma coisa que me perturba psicologicamente. (Sessão 11)

Maria defendeu que o desenvolvimento da abstracção se consegue também quando se resolvem problemas, que são tarefas que ela usa com bastante frequência: “Eu acho que também é desenvolvida quando nós apresentamos um problema e não apresentámos um esquema”. Segundo ela, “eles chegaram à abstracção, decerto, que era a necessária neste patamar, porque foram crescendo, porque as actividades foram exigindo deles cada vez mais, eles sentiram essa necessidade. Mas porque também trabalharam” (Entrevista final).

Esta professora concorda com a localização da Combinatória nos programas escolares, pois antes, como já foi referido, os alunos não têm desenvolvida a capacidade de abstracção necessária nem possuem a maturidade exigida para a sua compreensão.

Maria mostrou ter conhecimento dos programas e do seu desenvolvimento vertical e, inicialmente, achou que seria vantajoso implementar o ensino da Combinatória mais cedo, com outra abordagem, adaptando as estratégias de ensino ao nível etário dos alunos.

Os programas, de certo modo, precisavam de uma reorganização. Eu acho que é assim: a maturidade dos alunos, para conseguirem abstrair-se muitas vezes do que é a realidade deles e perceberem, talvez só no 12.º. Se este tema comesse a ser trabalhado parcialmente noutros anos, iria permitir aos alunos, gradualmente, uma preparação muito melhor. Claro que a capacidade... a maturidade abstracta intelectual de um aluno de 10.º ano é muito pequena, porque nós todos sabemos o que é o currículo do ensino básico e a exigência do ensino básico, basta olhar para os exames do 9.º ano. Se nós no 10.º ano comessemos com Combinatória, tal como pretendemos no 12.º, não teríamos sucesso, se comessemos com outra estratégia provavelmente chegaríamos ao 12.º e se tornássemos a abordar a Combinatória haveria melhores resultados. (Entrevista inicial)

Porém, esta opinião foi-se alterando ao longo do trabalho desenvolvido, afirmando nas sessões que a maturidade dos alunos não permite uma abordagem do tipo que se implementou e que não seria oportuno leccionar este conteúdo a crianças.

Maria: Pois, Margarida, mas eles aqui não têm maturidade para compreender.

Margarida: Não têm maturidade. A não ser que eles estivessem habituados a esse tipo de trabalho.

Maria: Acho que seria pior, se fosse feito com crianças mais pequenas... Como é que teria sido, Margarida? Olha no 9.º ano.

Margarida: Mas, oh Maria, eu lamento que aconteça isso.

Maria: Pois é! A verdade é que a maturidade deles não nos permite. E também há muitos que não se interessam por este tipo de abordagem. (Sessão 10)

Maria mostrou igualmente ter conhecimento horizontal do currículo e de concretizar algumas orientações, nomeadamente a articulação entre várias disciplinas.

Claro que nós também hoje temos que ter uma abertura de interdisciplinaridade. E, às vezes, aparecem livros a falar questões de Química...

Um aluno, uma vez, perguntou-me sobre a evaporação da gasolina, e eu antes tive que ir perguntar a um professor de Química e de Física. Uma vez, um aluno perguntou-me uma secção num octaedro que era tão complexo que, para eu desenhar, tive que pedir ajuda a um professor de Geometria Descritiva. Teve que ser ele a construir um modelo para eu poder mostrar. Por isso, efectivamente, nós também precisamos muitas vezes de recorrer a professores de outras áreas. (Entrevista inicial)

Gestão do tempo de leccionação. A grande preocupação de Maria foi sempre a gestão do tempo para cumprir adequadamente a planificação a que a sua escola se propôs, e, nesse sentido, para gerir toda a sua actividade lectiva, implementou várias aulas extra. A possibilidade de não cumprir todo o plano de uma aula desiludiu-a e dissuadiu-a de concretizar as tarefas inovadoras a que nos propusemos. Quando cumprir a planificação se transforma no principal objectivo da aula, o factor tempo é constrangedor e, sem dúvida, condiciona a acção do professor.

O Ministério devia dar essa autonomia às escolas, para que os professores pudessem gerir melhor os conteúdos, porque decerto que há turmas e alunos que reagem duma forma muito boa e aulas não são precisas tantas, mas geralmente o que está é muito pouco para nós podermos explorar desta forma. Porque se nós tivermos 3 ou 4 ou 5 ou 6 blocos para explorar Combinatória, isso não dá para fazermos actividades diversificadas, aulas em que possamos utilizar uma estratégia colaborativa, porque não chega o tempo, sem dúvida, para dar. (Entrevista final)

Assim, Maria considerou que o número de aulas previstas nos programas podia até ser suficiente para uma turma, mas não o ser para outra, salvaguardando o facto de ser insuficiente para implementar uma prática inovadora do género da que se propôs neste projecto. Mesmo assim, na sua perspectiva, a experiência foi positiva.

Maria revelou-se uma profissional que intervém na elaboração do currículo a concretizar na sua prática lectiva, leccionando o conteúdo “aplicações ao cálculo de probabilidades” antes do “triângulo de Pascal” e do “binómio de Newton”, alterando, deste modo, a sequência dos conteúdos prevista.

Durante a sessão 12 salientou-se alguma discordância sobre a articulação das várias orientações curriculares preconizadas, considerando-as incoerentes, como se verifica no diálogo que se apresenta a seguir.

Maria: Chegámos à conclusão que há um problema em tudo isto, não é... onde estão e quem viu já as Normas traduzidas... Então vai lá ler o que diz exactamente lá. Onde está a discussão entre as estratégias, o tempo, o programa, as competências, não há esta discussão na... Não é na horizontal, é na vertical. Porque na horizontal estamos aqui a discutir nós, que somos três professoras que só fizemos as estratégias e não fizemos mais nada. Na vertical eu não vejo ninguém a questionar isso.

Margarida: Vai ter que questionar agora com o novo programa, não é?

Maria: Mas também tem que se questionar no secundário, Margarida. Também tem que se questionar no secundário, porque na vertical as pessoas que escrevem sobre isto são professores.

Bárbara: Pois é. E é só teoria, não é?

Maria: São professores, Margarida, e nós também somos. E nós temos este problema entre nós, que é: 'Eles perceberam', agora nós questionámos: 'Eles perceberam, como é que eles perceberam?', se nem para nós hoje isso tinha significado. Como é que para crianças de 17 anos, com capacidade de abstracção muito menor, e lógica muito menor, teve significado? Teve que ter. A resposta não é 'teve'. Teve que ter... Eu faço uma omeleta com dois ovos, ou com três ou com seis.(Sessão 12)

É de destacar que no nosso país o tema Probabilidades e Combinatória, onde está integrada a Combinatória, fazendo parte do programa do 12.º ano, é tratado de forma mais profunda do que em outros países, onde o seu ensino se inicia mais cedo (Ponte & Fonseca, 2000).

Conhecimento sobre a aprendizagem

Processos cognitivos. Maria sustentava que os alunos são a “imagem” do professor (Mason, 1996). O facto de esta professora leccionar a disciplina de Matemática A, à mesma turma, há um longo período de tempo – terceiro ano consecutivo – releva a sua opinião, pois este contacto prolongado no tempo potencia a aprendizagem do comportamento e das características da sua professora.

Porque os alunos são a nossa imagem, e se nós continuarmos a pensar na Combinatória como aquele conjunto de páginas do manual em que se tem que dar aquelas fórmulas e eles têm que saber, eles não vão crescer como alunos. Decerto, as dificuldades do ensino da Combinatória e da sua aprendizagem passa por isso, eles têm de crescer, mas só podem crescer quando nós também crescermos dentro deste conteúdo. Eu acho que essa é a dificuldade. (Entrevista inicial)

Maria valorizou a forma como orientámos o trabalho, em conjunto, desenvolvido durante os três meses, destacando o desenvolvimento de uma nova visão da Combinatória que se reflectiu nos alunos.

Decerto a Margarida vai dizer o mesmo. Nós ganhámos estratégias, desenvolvemos estratégias, tarefas que nos fizeram [crescer] ... Permitiram levar aos alunos uma Combinatória muito diferente do que seria uma Combinatória se não fosse este trabalho. Hoje, eu digo que os resultados foram bons, porque o espelho das estratégias é esse, foi o sucesso das estratégias que adoptámos. (Entrevista final)

Na opinião de Maria, os alunos sentem dificuldades em Combinatória também pelo facto de trazerem para a sala de aula uma ideia negativa do exterior, que acaba por influenciar a sua aprendizagem, e que considera difícil vencer.

Porque é assim, se nós começarmos, os alunos dizem: 'Ai professora, já perguntei e este tema é tão difícil!' *A priori* eles já vêm com uma concepção que é muito difícil, que exige muita interpretação de Português, que a torna mais difícil, e porquê? Porque eles abrem o manual sem ouvirem o professor, olham para uma fórmula que aparece lá escrita e depois vêem não sei quantos exercícios. E criam essa concepção, que vai ser aquilo 'depois vou usar, e como é que sei qual é que vou usar', sem tentarem perceber. O que eu acho que é difícil é destruir esta imagem que eles têm da Combinatória e começar a trabalhar como se eles não conhecessem nenhuma imagem. (Entrevista inicial)

Maria enfatizou o facto de no trabalho conjunto termos desenvolvido tarefas específicas para os alunos: "Foi diferente, ou seja, cada uma de nós adaptou aos nossos alunos, à nossa prática e àquilo que é significativo para nós. Também não poderia ser doutra forma, não é?", até porque "os nossos alunos são todos diferentes e exigem de nós posturas diferentes e estratégias diferentes" (Entrevista final). A professora regozijou-se por termos encontrado uma boa metodologia para ensinar o tema.

Eu acho que é muito importante dizer isso, ou seja, eles trabalharam muito, gostaram muito, atribuíram muito significado a tudo que se fez e a todo o trabalho que foi desenvolvido, desenvolveram uma aprendizagem conjunta e participativa e por isso venceram dificuldades, que nós estávamos receosas das dificuldades normais deste conteúdo. O facto de eles terem trabalhado tanto em conjunto, com tarefas tão significativas, tão pensadas para eles, ou seja, não foram pensadas para 10.000 alunos deste País, mas pensadas para os nossos alunos, que nós sabíamos que conhecimentos traziam. Decerto ajudou a que o caminho fosse mais fácil. Há vários caminhos de ensinar Probabilidades e nós conseguimos encontrar aquele que é o mais fácil, seria muito difícil se não fosse assim. Efectivamente eles conseguiram muito bons resultados nesta unidade. (Entrevista final)

No que proferiu, a professora pareceu valorizar a participação e o envolvimento de todos, ouvindo as opiniões e respostas dos alunos e proporcionando momentos de discussão na turma, provocando diálogos como forma de os alunos se ouvirem uns aos outros e interagirem. Porém, na observação da prática de Maria, apercebemo-nos que, em muitas situações, não se verificou

isso, como se pode confirmar no excerto de um diálogo estabelecido entre a professora e os alunos no desenvolvimento da tarefa “à descoberta do triângulo de Pascal”:

Maria: Então podem chegar a uma conclusão ou não?

Aluna: O primeiro e o último...

Maria: O primeiro e o último são iguais. Então quer dizer que, para qualquer linha, as combinações de n , zero a zero, vão ser iguais às combinações de n , n , a n . Combinações de n , um a um vai ser igual...? E indicam o quê?

Alunos: A linha.

Maria: Ai é? Exactamente. Mas porque é que é? Vamos tentar escrever. Porque aqui tinha quantas caixas? Duas caixas, sim?

Alunos: Sim. (Aula de 23/10/08)

Mas o trajecto percorrido não foi de todo tão agradável como parece, pois muitos constrangimentos surgiram. Por exemplo, após uma das aulas, Maria afirmou:

Senti um vazio quando saí na quinta-feira, vocês não, porque vocês gostaram da turma, não é? Eles são miúdos e eu tenho a noção de até onde eles podem ir. E pensei: ‘Meu Deus, fiquei aqui este tempo todo, eles não compreenderam nada, nós vamos chegar à próxima aula...’ Para mais, tinha uma reunião com os professores do 12.º, para organizar trabalho, apercebi-me que, com o bloco que falta tratar ainda ia ser pior, porque este trabalho demora, efectivamente, muito mais do que como os outros estão a implementar. (Sessão 7)

Este comentário foi proferido na sessão de reflexão da primeira aula a que Margarida e Bárbara assistiram, tendo esta docente optado por não usar a actividade introdutória do tema, tarefa bastante discutida e trabalhada nas sessões de planificação, e que Margarida usou com sucesso. A sensação com que saiu desta aula preocupou imenso Maria, desmotivando-a um pouco, como se evidencia no diálogo seguinte:

Maria: ... não consegui fazer nada, e os alunos não conseguiram perceber nada. Isto foi a minha ideia. E eu conheço-os desde o 10.º.

Bárbara: E hoje já tens outra opinião.

Margarida: Conclusão: muitas vezes...Tu agora disseste: ‘eles não perceberam nada e não sei quê.’ Então, muitas vezes nós ficámos convencidas que eles perceberam....

Maria: Também não perceberam nada, Margarida. Mas aqueles são mais honestos.

Margarida: Eles perceberam tão bem e fazem tanta...

Maria: Não, mas aqueles são... Tu não reparaste no início da aula? Eles disseram: ‘Oh professora, temos que fazer estas demonstrações que nós não sabíamos?’, não repararam? (Sessão 7)

Incomodou-a muito o facto de ter de assumir perante os colegas que estava atrasada, era constrangedor na sua perspectiva, pois ela era tida como excelente professora no seu grupo e na sua escola.

Por isso é que os outros estão mais adiantados do que eu, e eu tinha um bloco que tinha que dar antes, não é? 'Que isto não podia ser assim', que ia a pensar: 'Ai meu Deus, eles não perceberam nada, como é que vai ser?' Mas efectivamente hoje, eu acho que eles perceberam. (Sessão 7)

Bárbara assistiu à segunda aula de Maria e ambas constataram que os alunos tinham percebido o conteúdo da aula anterior, o que contribuiu para que os alunos fizessem uma leitura cuidada e atenta dos enunciados dos problemas, contrariando a tendência para aplicarem conceitos e fórmulas leccionados imediatamente antes.

Maria estabeleceu, desde o 10.º ano, uma empatia muito grande com os seus alunos e como a turma era pequena, todos se relacionavam muito bem. O facto de existir um aluno com aproveitamento excelente, a quem a professora tinha atribuído no ano anterior a classificação de 19 valores, constituía para os colegas um enorme orgulho. Por isso, a professora solicitava muitas vezes sua participação, porque os colegas confiam nos seus raciocínios.

Eles são assim, no teste, o André é o melhor, e eles querem que eu lhe dê 20. Todos querem que eu dê 20, e a pressão... Porque eles pedem aos professores para me pedirem para o dar, e eu estou sempre a dizer: 'Pronto, mas vocês dizem aos outros professores e os outros professores votam'. O ano passado eu dei 19, ele acaba os testes primeiro do que eles, e eles [dizem]: 'professora vá ver se ele tem 20'. E por exemplo, se me perguntarem, é logo: 'O André teve 20?' Eles são assim, são muito compreensivos. Nem eram todos da mesma turma do básico e foram-se aceitando nas diferenças. Por exemplo, a Vera é uma aluna que está à frente, que tem muitas dificuldades, e foi trabalhando, e elas ajudam-na muito. E ela tem muitas dificuldades. (Sessão 7)

Na entrevista inicial, esta professora definiu o perfil de um bom aluno em Combinatória da seguinte forma: "Geralmente os bons alunos em Combinatória são os maus alunos noutros conteúdos. Porque são alunos que têm uma capacidade de percepção e de visualização fora de série". Todavia, o seu melhor aluno também revelou capacidades em Combinatória, como Maria evidenciou:

Porque quando ele ouve... Quer dizer, por exemplo, quando é um problema que eu tinha 6 amigos para se sentarem lado a lado, qual a probabilidade? Eram 4 rapazes e 2 raparigas, qual a probabilidade de ficarem juntos por sexos. Todos fizeram as combinações e depois os arranjos, e ele respondeu dois sobre combinações de 6, quatro a quatro. Porquê? Porque ele não pensou nas pessoas, ele pensou que há combinações de seis, quatro a quatro formas, de seis lugares escolher quatro e desses só dois é que interessam, são os rapazes que ficam juntos. Foi muito mais rápido que os outros. (Sessão 14)

No entanto, Maria desvalorizou o caso, referindo: “Agora, por que é que ia estar a ver que era vezes os arranjos e não sei quê, se ‘para que é que isso interessa, se é mais fácil pensar que escolho os lugares’”. E não foi a única vez, pois durante a sessão afirmou que quando os seus alunos conheciam as respostas correctas, eles não ficavam motivados para desvendar a razão de ser de outro tipo de resposta, e no caso de serem erradas, então perdiam todo o interesse em explorar a situação, em discutir o que está errado, acrescentando: “Em Psicologia até dizem que o facto de [os alunos] verem os erros reforça ideias erradas” (Sessão 10). Na sua opinião o erro não deveria ser evidenciado e valorizado: “Eles gostam de fazer bem, de acertar e valorizam esse facto (...) Todo o trabalho que eles fazem é muito importante para a avaliação deles (...) [Por isso] têm de fazer acertadamente” (Sessão 14). Esta ideia foi reforçada na mesma sessão, quando referiu que os alunos sentem insegurança neste tema, visto que:

Eles têm dificuldades de interpretação, se é efectivamente pelo facto de ter tantos processos de resolução que eles próprios, podem estar a fazer bem, só que os processos são diferentes, que têm que questionar e analisar cada processo para ver se está certo, não é? Até pode dar o mesmo resultado mas estar mal, também já se chegou a essa conclusão. Isso faz com que eles se sintam sempre inseguros neste tema. (Sessão 14)

Maria comentou na sessão de reflexão acerca das respostas que os alunos apresentaram ao questionário ministrado no final das aulas de “ter a capacidade de se aperceberem que há respostas diferentes que podem estar igualmente correctas. Um recorreu às pessoas e outro recorreu às maneiras de sentar pessoas, são questões muito diferentes. Eu acho que todos acabam por dizer isso [gostaram de conhecer os vários processos] ”, mas contrapôs, citando o seu melhor aluno: “Para que é que nós estamos a fazer assim se é muito mais fácil...” Na sua perspectiva, o que os alunos gostam mais “é de fazer numa forma mais fácil”.

Mas o discurso que a docente desenvolveu, desvalorizando o erro, não foi corroborado na resposta que proferiu quando questionada sobre o comportamento dos alunos com mais dificuldades a Matemática, e cuja participação se evidenciou na Combinatória. Maria teve consciência de que ouvir os alunos e de lhes proporcionar situações, neste caso de relembrar conceitos apreendidos em anos anteriores, provocou um diálogo que lhe permitiu perceber os conhecimentos e dificuldades deles e, simultaneamente, facultou a estes o estabelecimento de conexões entre conceitos matemáticos. Margarida e Bárbara destacaram a participação excelente de uma aluna de Maria, a Amélia, confirmando a sua professora que esta aluna

sempre manifestou muitas dificuldades a Matemática, e, que de facto, neste conteúdo se empenhou, obtendo uma classificação muito boa no teste intermédio.

É assim, o facto de nós termos desenvolvido aulas que permitem a participação dos alunos valoriza aqueles que muitas vezes têm receio de dar a resposta certa. Ao valorizarmos os processos fez com que todos sentissem que poderiam participar igualmente. Ou seja, que não era tão importante dar a resposta certa, mas que era muito importante o processo. Foi engraçado que houve uma aula em que a Amélia encontrou a justificação para a resposta errada do João, e disse: ‘não, ele pensou muito bem, porque ele só não sabia que os expoentes se multiplicavam, pensou que se somavam, mas está lá tudo. Ou seja, eles próprios conseguiram chegar mais longe, ‘faltava só aquilo, ele até pensou muito bem’, não é? Esta intervenção, eles não teriam coragem [de a fazer] se as aulas não fossem desenvolvidas segundo esta estratégia. Porque estava errado, e agora porque é que vamos dizer que está errado? Eles sentiram que podiam participar livremente e que a sua participação ia ser valorizada. Por isso mesmo, aqueles que tinham mais dificuldades participaram. E isso foi uma mais-valia. (Entrevista final)

Inicialmente, na sua perspectiva “Os alunos que são bons em Combinatória não precisam, provavelmente, de fazer mil exercícios, fazem dois, percebem efectivamente, não precisarão de fazer mais, porque perceberam o conceito, quando provavelmente noutros conteúdos terão que fazer muitos para conseguir chegar às regras” (Entrevista inicial). Contudo, o que exprimiu na entrevista final não corresponde ao que o seu discurso inicial fazia prever.

Bem, eu tenho que dizer isto. Agora a resposta... Agora a pergunta mais acertada seria: ‘Como é que os professores pensam que os alunos devem aprender Combinatória?’ Se eu não mudei isso, não. Eu acho que é essa a questão. Nós achámos que os alunos devem aprender Combinatória, porque é muito difícil, então têm que fazer muitos exercícios, trabalhar muito, fazer muitos. Temos muito medo porque eles não vão conseguir fazer a tempo muitos para estarem preparados [para o teste intermédio]. (Entrevista final)

Maria, apesar de valorizar as estratégias por nós definidas nas sessões e usadas nas aulas com as necessárias adaptações às características e interesses dos alunos de cada professora, colocou algumas reservas relativamente ao que tinha comentado inicialmente, ao reafirmar que, de facto, para prepará-los para os testes eles precisam, sentem necessidade, como em anos anteriores, de resolver muitos exercícios, todos os do livro do GAVE e os das fichas, porque os seus alunos gostam de trabalhar muito – “Eles trabalham muito, porque, por exemplo, eles vão todas as quartas-feiras, todos para a sala de estudo. Eles fazem todos os trabalhos que eu mando, eles já fizeram todos os exercícios do GAVE, eles trabalham efectivamente” (Sessão 14).

Na sua perspectiva, os alunos só se sentem tranquilos e conseguem obter elevadas classificações quando fazem os exercícios todos, acrescentando: “eles sabem olhar e dizer: ‘ah, este é muito mais difícil’, porque, por exemplo, ‘nós vimos estes no GAVE e eram muito mais fáceis’”. Eles têm essa capacidade de avaliar, porque eles trabalham muito mais, eles não se resumem àquilo” (Sessão 14). Porém, para atingir este objectivo, Maria teve que dar cinco aulas extra neste tema, de modo a poder implementar as novas tarefas e, simultaneamente, resolver o manancial de exercícios dos livros escolares e por ela elaborados. Foi esta a solução que o grupo de trabalho encontrou para colmatar o factor tempo e cumprir a planificação, aspectos que, frequentemente, se revelam limitadores da implementação de um ensino inovador. Apesar disso, na sua perspectiva, valeu a pena.

Mas, o que efectivamente a nós, no fim, nos satisfaz mesmo muito é verificar que os alunos gostaram, e não só gostaram como se motivaram, se empenharam num tema que à partida os alunos têm muitas dificuldades. E se eles se sentiram tão motivados, isso já foi uma mais-valia muito grande, porque não desistiram na primeira dificuldade, porque ficaram efectivamente envolvidos com o trabalho. (Entrevista final)

Interesses e expectativas dos alunos. Maria revelou-se uma pessoa preocupada e atenta em relação à postura dos seus alunos na aula e como já são seus desde o 10.º ano, facto que considera positivo para o desenvolvimento integral dos alunos, ela afirma com convicção:

Estes alunos que eu tenho este ano, no 12.º, são meus alunos desde o 10.º e isso permite que, de ano para ano, sinta que os alunos se envolvam muito mais naquilo que é uma aula. E hoje eles controlam muito mais a aula, a aprendizagem, o processo de aprendizagem, do que era no 10.º ano. Claro, a maturidade também é outra e os conhecimentos são outros. Mas gosto que os alunos se envolvam e eu antecipadamente explico o que é que nós vamos dar e eles têm alguma curiosidade em ver antes, para chegarem à aula e já terem alguma preparação. (Entrevista inicial)

O professor deve estar atento às características dos seus alunos, que variam de ano para ano e de turma para turma, no sentido de adaptar as suas opções metodológicas às suas necessidades, pois pode ter de reajustá-las quando passa de uma turma para outra, ou um de ano para outro. Deve também ter em atenção a sua área disciplinar, para lhes proporcionar o tipo de tarefas e situações de ensino que lhes proporcionem aprendizagens significativas.

Estes, por acaso, que são Economia, sempre direccionando para a área e os [futuros] interesses profissionais deles, que será muito mais fácil cativá-los. Se for direccionado a um interesse deles, o futebol ou moda, se for o caso das meninas,

do que se eu for buscar um exemplo tão abstracto, tão abstracto, duma realidade que nem sequer é vivida por eles. (Entrevista inicial)

Maria enaltece o facto de criar contextos favoráveis à participação dos alunos, nomeadamente dando possibilidade de colocarem dúvidas no decorrer das aulas acerca dos conteúdos a tratar, ou relacionados, recordando um episódio decorrido no ano anterior.

Como há esse à vontade entre todos, eles estão perfeitamente à vontade para colocarem questões sobre o que nós estamos a dar, sobre outros conteúdos que eles possam achar que... Eu lembro-me que no ano passado tinha uma turma de 12.º, que, quando eu expliquei as permutações, me perguntou qual seria o significado do zero factorial. E, efectivamente, nunca tinha aparecido no livro isso. (Entrevista inicial)

Maria acrescentou que tem também a preocupação de desenvolver competências, como a autonomia, que são, na sua perspectiva, veiculadas pelos vários trabalhos que marca para casa diariamente. Por vezes, coloca problemas mais complexos com o intuito de os confrontar com a dificuldade e instigá-los na pesquisa individual ou mesmo quando trabalham todos juntos.

Como eu também lhes coloco muitas questões que possam ver em casa, para depois irem pensar, e problemas diferentes, eles também procuram outras situações para colocar, até situações que apareçam... Desafios que apareçam num jornal ou num livro, eles acabam por perguntar se não conseguirem fazer. (Entrevista inicial).

Numa sessão em que se abordou este aspecto, desencadeou-se o seguinte diálogo entre as participantes:

Maria: Eles são muito assim. Eles não têm problemas nenhuns em dizer que não perceberam, ou que não souberam fazer, ou trazer outros exercícios de outros testes que viram...

Margarida: Sentem-se à vontade. Estão muito tempo contigo, não é?

Maria: Pois, também é isso.

Margarida: Estão muito tempo e em ambientes diferentes. O que acho que fica mais fácil... (Sessão 7)

Os ambientes diferentes a que Margarida se refere são as aulas extra, que implementa com regularidade, os vários contactos na sala de estudo, a solicitação dos alunos, e a comunicação via e-mail.

Maria: Mas já é assim desde o 10.º, Margarida. Os meus entram na aula e vêem se eu estou bem-disposta ou mal disposta. Eles entram na sala, olham: 'hoje a professora...', têm essa.... Mas eles são conversadores, Margarida.

Margarida: Ai, mas eu não me apercebi de nada.

Maria: As quatro estão sempre... não reparaste que elas implicavam com o André?

Margarida: Sim, mas estavam a trabalhar.

Maria: Estavam a trabalhar, mas implicam. Como eu o protejo muito, porque elas estão sempre a implicar com ele, então elas acham que ele é o querido. (Sessão 7)

Maria evidencia, mais uma vez, o profundo conhecimento que tem dos nove alunos, que eram seus desde o 10.º ano. Relativamente aos que tinham chegado de novo à turma, no início do ano lectivo, pouco falou, até porque a Combinatória foi leccionada no início do ano e a professora ainda não tinha tido tempo para os conhecer bem. Ainda, referindo-se a outras três alunas que conversavam bastante entre elas durante as aulas, afirma:

Não, elas, as três, são muito trabalhadoras. Na sala de estudo, elas são as alunas da escola inteira que mais frequentam a sala de estudo. Elas são trabalhadoras. Mas não tinham o ano passado aulas, por exemplo, de manhã, e iam para a escola para trabalhar para Matemática. E todos os professores diziam, quando íamos à sala de estudo e elas iam trabalhar para Matemática. E elas chamavam os professores. Por exemplo, se tiverem uma dúvida, têm coragem de pedir, para chamar um professor para tirar a dúvida de Matemática. Sentem esse à vontade. Elas as três: a Cristina, a Elsa e a Filipa. (Sessão 7)

Conhecimento instrucional

Preparação das aulas. Na preparação das aulas, Maria tinha em conta as competências que pretendia desenvolver, orientada pelos objectivos que o currículo propunha, as necessidades dos alunos e a sua área curricular, de modo a tornar os assuntos tratados na aula significativos e motivadores para eles:

Tenho em conta essencialmente as competências que eu pretendo, e de acordo com o programa que se pretende, que eles possam adquirir. Também, claro, o conhecimento que eu já tenho dos alunos e do que os possa motivar ou não, e a relação, sempre, que possa ter com a sua área curricular que escolheram, sempre. (Entrevista inicial)

Maria dá ênfase à motivação dos alunos, ideia que aprofunda e que acha preponderante, orientando neste sentido as suas escolhas em termos de tarefas a definir, como o seguinte excerto testemunha:

Eu acho que eles vão aprender melhor, sem dúvida, se nós conseguirmos usar exemplos em que eles até chegando a casa possam fazer disso alguns jogos com a família, como o caso de ver no totoloto quantas apostas teriam de fazer, quanto dinheiro tinham que gastar para sair o Euromilhões. Ou então, para ver se o carro do pai é tal matrícula, quantos carros existem com aquela matrícula, com aquele formato. Decerto acho que parte do professor tomar a iniciativa de arranjar situações que sejam para eles apelativas e muito familiares, que facilmente a gente os possa motivar porque lá fora eles vão encontrar uma situação que podem contar aos colegas, que podem também aplicar a outro conhecimento. (Entrevista final)

Sem dúvida, na sua prática concretizou esta intenção porque, para além dos problemas que propôs, integrados nas fichas de trabalho elaboradas nas sessões, a docente propôs outros em que pretendia o envolvimento de todos os alunos e, nesse sentido, considerou vários contextos em várias situações, tendo sempre a preocupação de que cada problema fosse significativo para eles: “Acho que é assim: os professores devem ter a preocupação antes de planificar o tema, de forma a motivar os alunos; por vezes, contrariar também a perspectiva dos manuais” (Entrevista final).

Maria referiu, no início da investigação, que na planificação das suas aulas também tinha presente livros escolares, o adoptado na sua escola e outros: “Nós também temos a obrigação moral e ética de utilizar o manual, mas podemos, sem dúvida, adaptar o que está no manual para o que entendemos que seja a estratégia mais adequada (Entrevista inicial). Mas esta docente criticou a estrutura que alguns manuais apresentam neste conteúdo.

Eu acho que em muitos dos manuais que nós adoptamos a combinatória é explorada desta forma, que é: páginas e páginas consecutivas de exercícios em que o primeiro exercício é uma bandeira e dizem que tem 4 barrinhas, há 5 cores, quantas formas há? A seguir aparece um que não é uma bandeira mas é um saquinho com bolinhas para pintar, e a seguir aparece outro... E aí estamos a tentar que os alunos adquiram aquela competência de trabalhar em combinatória através da memorização da própria estratégia. Ou seja, quando nós apresentamos, até pode ser a mesma coisa, o mesmo raciocínio implícito nas bandeiras, mas noutro contexto, eles nunca vão conseguir fazer. (Entrevista inicial)

Durante as aulas ministradas por Maria foi constante a prática de resolução de exercícios para consolidação dos vários assuntos tratados, do manual e de outros livros escolares, aos quais os alunos tiveram acesso através de fotocópias. Sobretudo nas aulas extra implementadas, esta prática era predominante, pois esta docente acreditava que os alunos tinham de praticar muito e era este tipo de trabalho que eles gostavam de efectuar. Depois de ter dado as permutações, Maria deu uma aula extra na sala de estudo da sua escola, estando todos os seus alunos presentes, e em que se resolveram exclusivamente exercícios de cálculo, contemplando fórmulas e a simplificação também de quocientes. Com a repetição de procedimentos, os alunos envolveram-se e empenharam-se neste tipo de tarefas, deixando transparecer o gosto pela exercitação destes exercícios propostos em sucessivas páginas do seu manual.

Quando questionada sobre a influência, na planificação das suas aulas, das dificuldades e dos erros dos alunos que surgiam, por exemplo, nas respostas a questões de testes, Maria mencionou:

Isso acontece muito, geralmente eu corrijo os testes de um dia para o outro, o que quase não dá tempo para eles amadurecerem o que foi feito, e na aula seguinte eu nunca digo que vou entregar os testes, e faço questões similares àquilo em que eles erraram mais, para deixar que eles pensem e possam analisar se efectivamente não responderam porque era muito difícil, ou era muito abstracto, ou saía fora do contexto que trabalhámos na aula, ou se foi falta de estudo, ou se no momento não conseguiram pensar da forma correcta. Por isso, geralmente eu faço sempre isso no dia a seguir aos testes. (Entrevista inicial)

Perante o trabalho desenvolvido durante os três meses, a postura de Maria mudou relativamente ao modo como preparava o ensino da Combinatória, mudando os seus métodos de ensino em relação aos anos anteriores, como que se houvesse uma transferência do seu papel de “protagonismo”, valorizando o que os alunos construíram, as suas estratégias espontâneas, como acordamos em conjunto, em vez do ensino formal do tema, em que o professor tem tradicionalmente o “papel principal” de ensinar, de transmitir a informação.

Eu acho que mudámos todos muito. Primeiro, encarámos o tema de outra forma, é o primeiro, começámos a reflectir em necessidades que eu acho que nunca tínhamos reflectido, necessidades dos alunos e dos professores também. Ou seja, sentimos a necessidade de trabalhar mais com os alunos as suas perspectivas não é, os seus pensamentos, comunicar com eles as suas formas de resolução, analisar *a priori* porque pensaram ou *a posteriori* o que pensavam do que tinham pensado, reflectir sobre a própria aprendizagem, que provavelmente nós não fazemos isso no nosso dia-a-dia. (Entrevista final)

Seguindo esta metodologia, Maria considerou-a uma mais-valia e uma forma interessante e inovadora de leccionar a Combinatória. A preparação em conjunto da planificação das aulas, indo de encontro aos interesses dos alunos, também foi vista como uma vantagem.

E chegámos à conclusão que para nós foi vantajoso, porque nós começámos a conhecer melhor os processos da aprendizagem da combinatória dos alunos, e descobrimos estratégias que os alunos utilizam, que nós no fundo anulámos por completo quando não seguimos este tipo de metodologia, porque nós anulámos a participação do aluno, e ao anular a participação do aluno, ficámos sem conhecer estratégias de pensamento que eles têm, que muitas vezes levam a pensamentos muito mais desenvolvidos e ricos do que aqueles que nós levaríamos individualmente como professores, se seguissemos só a nossa estratégia. (Entrevista final)

Maria, no entanto, ressalva:

fizemos uma planificação, ainda que um plano é um plano, efectivamente, e depois na implementação da turma nunca corre tudo da mesma forma porque as turmas são diferentes, os professores são diferentes, e absorvem de forma diferente, interiorizam de forma diferente o plano da aula. (Entrevista final)

Gestão das aulas. Esta docente achava difícil ensinar Combinatória:

Acho, acho que é difícil. Tem que haver um grande esforço dos professores para usarem estratégias diversificadas para eles conseguirem perceber, porque, provavelmente, nós poderemos andar 4 meses e eles não perceberem nada, e decerto podemos encontrar uma estratégia e numa semana eles conseguem perceber. (Entrevista inicial)

Maria procurava, nas suas aulas, conduzir os alunos à compreensão de novos conceitos através de exemplos, da visualização de situações concretas, e preconizava que seria a melhor forma de leccionar o tema:

Portanto, através da exemplificação, se nós conseguirmos na sala de aula, por exemplo, quando pensamos em permutações, usar uma situação com cinco cadeiras, escolher cinco alunos e pô-los sentados de formas diferentes. Portanto, conseguimos exemplificar da melhor forma aos alunos, não é? Quando escolhemos um grupo de 4 alunos e vemos as formas diferentes de os organizar, de arranjar uma posição e diferenciar 3, e explicarmos através da exemplificação, da descrição dos nomes e tudo, é mais fácil para eles perceberem. (Entrevista inicial)

Maria sustentava a sua prática num reconhecimento forte da relação da Combinatória com a realidade, ideia que demonstrou defender em muitas sessões, e, por isso, iniciava as suas aulas da seguinte forma: “Geralmente nós partimos de uma situação problemática ou de uma situação do dia-a-dia, por isso através de questões abertas e que possam interligar outros conteúdos e outros raciocínios inicio a aula” (Entrevista inicial). Assim, esta professora explorava estas situações e só depois definia e formalizava os conceitos.

Uma das acções que Maria pôs em prática, no decorrer das suas aulas, foi dar sempre tempo aos alunos para pensarem e resolverem um problema. A valorização deste tipo de prática vem do passado, não constituindo, por isso, uma novidade.

Dou sempre tempo. Eles sabem que, por exemplo, se forem exercícios do livro eu escrevo no quadro os exercícios que nós vamos fazendo, e eles vão tendo tempo. E sabem que passado 15m do primeiro, eu vou ver o que é que eles andam a fazer, ou pergunto. Eles sabem que há uma situação de tempo para eles pensarem previamente, mesmo que seja o trabalho de casa. Às vezes alguns dizem que não tiveram tempo para o fazer, eu dou-lhes algum tempo para poderem pensar antes de responder. (Entrevista inicial)

Procurámos saber de que forma o trabalho desenvolvido em equipa fez mudar a sua maneira de leccionar a Combinatória, e com satisfação referiu:

O facto de nós reflectirmos anteriormente, termos debatido tudo, fez com que nós criássemos a nossa própria estruturação [da aula] com base na informação que tu

ias fornecendo no trabalho que nós estávamos a fazer, claro. (...) E de facto nós sentimos que foi significativo, que eles aprenderam efectivamente. (Entrevista final)

Ambas as docentes concretizaram o mesmo guião que se elaborou nas sessões de planificação. Porém, Maria manteve sempre em todas as aulas observadas uma atitude directiva, procurando, como já foi focado, o envolvimento dos seus alunos em todas as actividades concretizadas, através do diálogo que se desenvolvia e na interacção com eles, diligenciando que todos trabalhassem, mas desempenhando sempre um papel activo, orientando a resolução das tarefas e usando muitas questões fechadas e de *confirmação e focalização* (Ponte & Serrazina, 2000).

Bem, eu acho que nós somos todos diferentes e temos práticas diferentes porque os nossos professores influenciaram-nos e direccionaram-nos provavelmente em sentidos diferentes. E os nossos alunos também são todos diferentes e exigem de nós posturas diferentes e estratégias diferentes. E a discussão e a análise de ideias fez com que nós conseguíssemos encontrar uma plataforma comum que valorizássemos estratégias comuns e fizemos uma planificação. (...) Fez com que nós conseguíssemos superar certas dificuldades que na aula à primeira vista seriam difíceis se não tivéssemos trabalhado e visto pontos de vista tão diferentes antes de chegar à sala de aula. (Entrevista final)

Maria admitiu que aprendeu com Margarida, nomeadamente tendo acesso a informações sobre o seu papel e postura na sala de aula, bem como dos seus alunos, pois a observação do comportamento da colega durante a acção permitiu-lhe reflectir e transferir ideias para o seu próprio desempenho.

Eu acho que a Margarida dá muito mais espaço à participação dos alunos dela do que eu, pronto. Eu decerto tenho uma postura mais interventiva do que a Margarida, não é? Eu sou muito... eu estou em cima dos meus alunos. Ou seja, a Margarida dá-lhes mais liberdade, mesmo na postura como pessoa. Eu chamo constantemente a atenção, eu estou a falar para aquele mas estou a olhar para aquele porque não está a olhar para mim. E eu tenho essa postura com eles, e eles próprios já têm essa postura comigo. (Entrevista final)

Maria admitiu que conduziu e orientou muito a aula, colocando bastantes questões dirigidas a determinados alunos e afirmou ter ficado elucidada sobre isso através das gravações e das transcrições que Bárbara lhe proporcionou.

Olho e vejo que conduzo muito a aula para determinadas pessoas, ou seja, quando eu preciso de chegar a um raciocínio, eu conduzo para aquele aluno, nitidamente. Porque eu tenho aquelas minhas âncoras, aquelas minhas referências, não é? Isso vê-se nas gravações, só conseguimos ver nas gravações ou nas transcrições, porque aí nós estamos a ver e compreender efectivamente o episódio. Quando

preciso, peço a intervenção do aluno a, b ou c, começo a ver: ‘eu chamei aquele aluno para isto. Ah, e depois tornei a chamá-lo para aquilo’. (Entrevista final)

Maria assumiu que é assim que desenvolve a sua acção, tendo sempre ela um papel muito activo, sendo o seu ensino pouco centrado no aluno, admite ser difícil reflectir diariamente, mas acredita que através da *reflexão sobre a acção* poderia mudar este comportamento.

Isso é a minha prática de todos os dias. Eu não consigo reflectir sobre isso, quer dizer, isso é a minha rotina, não consigo discernir se solicitei muito a intervenção daquele aluno. E essa reflexão nós só conseguimos fazer, e depois mudar e ver que, decerto, até podíamos pedir a intervenção doutros, sendo uma mais-valia para todos, e não utilizar tanto a, b ou c porque nós já sabemos efectivamente o feedback que eles nos vão dar. (Entrevista final)

A maior parte das aulas de Maria seguia esta estrutura: (a) iniciava-se com a correcção do trabalho de casa; (b) fazia a introdução do assunto a leccionar, recorrendo às tarefas de introdução, que consistiam na análise feita pelos alunos da resolução das próprias respostas que apresentaram no teste e através de um questionamento orientado chegavam à generalização; (c) nas tarefas de desenvolvimento, os alunos resolviam problemas da ficha e exercícios do manual; e, finalmente, (d) apresentava o trabalho para casa, que geralmente era extenso porque os alunos gostavam de trabalhar em casa.

A sua prática era muito centrada em si própria. A professora falava, escrevia no quadro o que os alunos diziam, colocava questões, às quais respondiam, ou, por vezes, ela respondia de imediato sem ter noção de que o fazia. Apesar disso, os alunos não se sentiam coagidos, o ambiente na sala era de respeito mútuo e de confiança na professora.

Será que Maria modificará, no futuro, esta postura? Depois de ter tomado consciência, de a ter reconhecido, não será fácil de a abandonar pois a gestão do tempo, no sentido de cumprir a planificação, os testes intermédios e o exame nacional são constrangimentos, que regulam e orientam a sua prática, até porque os seus alunos têm obtido um sucesso considerável nos testes intermédios em relação à avaliação interna.

É um factor que não podemos esquecer. Se nós somos avaliados externamente por isso, não nos podemos esquecer disso. Se aquilo é o que decide o futuro dos nossos alunos, nós evidentemente sentimo-nos responsáveis em seguir para aquilo, e isso limita a nossa prática. (Entrevista final)

Formas de trabalho dos alunos. Quando interrogada acerca da organização da sala de aula, se os alunos devem resolver as tarefas em pequenos grupos, em pares ou individualmente, Maria respondeu na primeira entrevista:

É assim, eu acho que, como os conteúdos são diferentes, provavelmente se eu dissesse que só aulas expositivas era muito bom, que aulas com trabalho de grupo era muito bom, com trabalho colaborativo era muito bom, estava errada. Porque dependendo dos conteúdos, acho que todas são boas quando pensadas anteriormente e adequadas aos próprios conteúdos. Mas eu, pessoalmente, gostaria mais de aulas em que fosse usar uma estratégia colaborativa entre os alunos e o próprio professor. (Entrevista inicial)

Relativamente à entrevista final, e depois de termos reflectido em equipa sobre o assunto, a docente apresenta o seguinte comentário:

Eu acho que deve haver um pouco de tudo, sem descurar nenhuma das perspectivas. Ou seja, há actividades que efectivamente são muito mais proveitosas se eles as desenvolverem em grupo. Se é um problema complexo, em que efectivamente têm de pensar, então, ao analisarem e discutirem ideias conjuntamente, vai com certeza ser muito mais proveitoso. Em grupos de dois, dois três, é o que eu uso mais na minha sala de aula, porque a disposição física, o espaço físico, contribui para isso. Mas também há actividades que, eu acho, têm que ser individuais. Por exemplo, nas produções escritas cada um vai ganhar mais com a análise da resposta de cada um. (Entrevista final)

Apesar de no início do trabalho conjunto Maria assumir que os seus alunos trabalhavam em pares, a organização física das salas da sua escola, na sua perspectiva, provocava naturalmente um trabalho desenvolvido por três, considerando que em todas as aulas os alunos trabalhavam em grupos de três. Relativamente a este assunto, quando confrontada na sessão de reflexão acerca das respostas apresentadas pelos alunos a uma pergunta do questionário, que as professoras ministraram no final do ensino do tema, 'Trabalhar em grupo foi importante para aprender melhor', e onde se verificou uma elevada frequência de respostas afirmativas, estabeleceu-se o seguinte diálogo:

Maria: Porque eles acreditam que trabalhando juntos poderão ser melhores, não é? Até porque é assim, a turma é muito pequenina, e o facto deles estarem todos em fila, e não assim [mesas isoladas], faz com que possam trabalhar diariamente três. Por exemplo, a Elsa trabalha sempre com a Cristina e com a Filipa. Quer dizer, é assim, há aqui uma diferença dos que já eram meus e os que chegam. Dos que eram meus, eles trabalham não em grupo formalmente, ou seja, não os tive que separar em grupo porque eles já estão lado a lado e já trabalham juntos.

Bárbara: Mas olha, aqui não se estão a referir àquela tarefa do triângulo de Pascal que fizeste em grupo? Achas que estão a falar sobre a globalidade das aulas?

Maria: Eu acho que é a globalidade das aulas. Porque, por exemplo, eles nunca fazem um exercício sozinhos. Por exemplo, sei lá, hoje, nós estávamos a fazer uns exercícios. A Elsa, a Filipa e a Cristina fazem uma coisa; a Amélia, a Rita e a Teresa fazem outra; o André, o Pedro e o João fazem outra. Ou seja, se eu mandar qualquer um deles ir fazer, eles vão dar a mesma solução porque eles trabalharam juntos.

Bárbara: Pois, mas como foi só numa aula que tu os puseste em grupo eu penso que é só relativo a essa.

Maria: Mas isso é o pôr em grupo fisicamente, não é? Que eu não sei se tem assim tanto significado pôr em grupo fisicamente. (Sessão 14)

Avaliação. Maria era uma professora muito preocupada com os seus alunos, propondo-se a prepará-los para obterem notas elevadas nos testes intermédios e no exame nacional, e para a persecução deste objectivo esta professora criou horas de apoio extra-aula para poder trabalhar mais com os alunos, incluindo a resolução de exercícios rotineiros e dos exames nacionais.

Os alunos tinham o seu endereço de correio electrónico, através do qual podiam solicitar esclarecimentos de dúvidas que, eventualmente, surgissem no decorrer do estudo autónomo realizado em casa, pois para além de resolverem exercícios de vários livros escolares, estes alunos, caracterizados como muito trabalhadores, resolviam também fichas elaboradas por ela e pelo grupo de Matemática da sua escola.

Maria avalia os alunos através de testes escritos e de questões de aula, formas de avaliação previstas nos critérios estabelecidos pelo grupo disciplinar da sua escola e que se coadunam com o tipo de ensino que ministra.

Nós fazemos questões nas aulas muito frequentemente. Por isso, é muito mais fácil ver como é que está a ser a evolução dos alunos e a aquisição das competências. Questiono-os muito, também para eles poderem reflectir e dizer o que pensam sobre o funcionamento das aulas. (Entrevista inicial)

Maria valoriza muito a linguagem escrita e a verbalização dos raciocínios utilizados quer por ela, quer pelos seus alunos. Defende e usa uma linguagem rigorosa e exige que os alunos façam o mesmo, o que se constatou nas suas aulas. Advoga que os alunos devem utilizar uma linguagem matemática e corrente correctamente, insistindo muito neste aspecto, pois no exame sai sempre uma composição: “Eu não posso pensar que um aluno vai fazer uma produção escrita, uma comunicação escrita ou uma composição escrita matemática em conjunto porque fico sem saber exactamente quem é que sabe escrever o quê. (Entrevista final)

4.2.4 Trabalho colaborativo

Para Maria, o trabalho colaborativo entre colegas foi aprazível e motivador e considerou a partilha de experiências e o confronto de pontos de vista aspectos importantes para o desenvolvimento do processo de ensino-aprendizagem: “É muito mais agradável trabalhar, [em equipa] com certeza. Bem, eu acho que nós participámos todos, nós temos personalidades diferentes e isso influencia a participação”. E completando a ideia, referiu que, para além desta prática ser benéfica e enriquecedora para o professor, os últimos a terem proveito são, sem dúvida, os alunos. Especificamente, no caso da Combinatória, esta forma de trabalho permite conhecer vários processos de resolução de problemas, os quais poderão ser de grande utilidade no tratamento das dificuldades dos alunos.

Acho também que seria muito enriquecedor juntar vários professores, juntar várias experiências; até se fizéssemos, provavelmente, todos a mesma tarefa, a mesma actividade aos alunos e analisássemos todos, íamos ter formas de pensar tão diferentes e igualmente correctas, que seria engraçado e até explicar aos nossos alunos outras formas de pensar, ou deixá-los pensar, ver se eles chegavam a outra forma de pensar. Porque decerto o ensino da Combinatória torna-se mais rico vendo experiências diferentes. (Entrevista inicial)

Maria já trabalhava antes, de forma voluntária, com outros professores da sua escola, com colegas que leccionam a mesma disciplina e o mesmo ano escolar. Esse trabalho, não imposto superiormente, permitiu estabelecer cumplicidades entre eles, com vantagens para a obtenção de um bom aproveitamento dos alunos da escola, a nível interno e externo.

Nós temos as aulas, por exemplo, eu tenho 12.º 6 ao mesmo tempo que a Manuela tem o 12.º 1, nós damos as questões de aula ao mesmo tempo, iguais no mesmo dia. Damos os testes iguais no mesmo dia. Então serve de termo de comparação esse trabalho, que é muito mais valioso do que eu estar a trabalhar isolada. (Sessão 7)

Porém, Maria elencou alguns constrangimentos; entre eles, o factor tempo comum nos seus horários e um espaço físico para trabalhar, uma vez que não existiam salas disponíveis para desenvolver este tipo de trabalho.

O problema, a desvantagem do nós trabalharmos é que temos que trabalhar em horários muito diferentes uns dos outros, e que é muito difícil gerir dentro do que é hoje a nossa competência lectiva e não lectiva dentro da escola, o tempo para trabalhar colaborativamente, e não são dadas condições físicas para fazermos esse trabalho. Ou seja, existe trabalho colaborativo porque há um grande esforço dos professores em desenvolver esse trabalho. Porque efectivamente não é apoiado em nada pelo Ministério, o que não permite às escolas dar horas no horário dos

professores para eles trabalharem colaborativamente, nem condições físicas.
(Entrevista inicial)

O trabalho em conjunto, quando preparámos as tarefas, elaborámos materiais e partilhámos saberes e dúvidas, bem como quando inicialmente discutimos estratégias, no sentido de superar as dificuldades dos alunos, e posteriormente, nas sessões de reflexão, reflectimos sobre situações problemáticas emergentes na prática, de modo a encontrarmos alternativas para a intervenção na acção, na perspectiva de Maria, foram verdadeiros momentos de autoformação.

O facto de nós termos trabalhado em grupo fez com que nós ouvíssemos três perspectivas diferentes do mesmo conteúdo e conseguíssemos ver e descobrir dificuldades na abordagem daquele tema, que nem nós próprias conhecíamos muitas vezes, e ultrapassarmos outras dificuldades que nós tínhamos. Quando nós nos apercebemos que um conteúdo pode ser muito fácil para a pessoa A e que aquela pessoa até consegue arranjar uma estratégia muito adequada, e certo, eu não consigo arranjar uma estratégia tão adequada para determinado conteúdo, não é? (Entrevista final)

Segundo Maria, “nós trabalhamos colaborativamente, mas ninguém se sobrepôs a ninguém. Nós crescemos conjuntamente, sem nunca tentar impor aos outros, ou seja, nós crescemos porque nós achámos que era melhor este caminho. Ninguém impôs nada a ninguém” (Entrevista final). O respeito aliado à motivação e envolvimento, que efectivamente se desenvolveu ao longo de todo o trabalho – pois foi considerado por todas as intervenientes muito significativo, visto o tema e o seu ensino ser considerado difícil – efectivamente fez com que ninguém faltasse a qualquer sessão e, na impossibilidade de se realizar num dia, procurávamos em conjunto alternativas.

Nós conseguimos, desenvolvemos um trabalho colaborativo de muito respeito pelas necessidades de cada um. Ou seja, não dava naquele dia nós tentámos mudar, respeitando, sem nunca ninguém dizer o que tinha que fazer a ninguém, mas houve esse respeito efectivamente. E foi porque nós atribuímos de facto um significado muito importante ao trabalho que estávamos a fazer. (Entrevista final)

A confiança, que foi crescendo com o tempo, possibilitou que o projecto se desenvolvesse de modo a permitir “a discussão e a análise de ideias, o que fez com que nós conseguíssemos encontrar uma plataforma comum de ideias, que valorizássemos estratégias comuns” (Entrevista final). Reforçando o diálogo mantido no grupo e tendo em conta as questões que foram sendo levantadas, proporcionaram-se momentos de discussão potenciadores da construção de novos conhecimentos e de transformação de práticas.

Esta docente classificou a oportunidade de assistir a aulas da colega como muito importante, proporcionando-lhe momentos de aprendizagem sobre diferentes estratégias de abordagem de um mesmo assunto, facultando-lhe também uma percepção das dúvidas e do papel dos alunos na sala de aula, diferente daquela que é a sua experiência.

Aprendi muitas coisas com os alunos da Margarida, também. Eu acho que isso é importante. Ou seja, o facto de eu ir assistir às aulas, não vimos só um papel, vimos o papel dos alunos. Quer dizer, vimos a implementação de uma determinada tarefa, que nós pensámos conjuntamente, e, que em contextos diferentes, acabou por se traduzir em resultados diferentes também. Porque os alunos são diferentes, porque nós acabámos por adoptar posturas diferentes. Ou nós previamente já vimos uma aula com aquela planificação, conseguimos ultrapassar dificuldades na nossa mais facilmente, claro. Mas eu acho que foi muito gratificante, essencialmente foi muito bom para nós, como experiência e como mais-valia na aquisição de estratégias novas, no desenvolvimento de estratégias, mas devo dizer que acho que aqueles que mais ganharam foram efectivamente os nossos alunos. (Entrevista final)

O ensino, quando partilhado com os colegas, deixa de ser privado, e o professor fica exposto, revelando desta forma algumas fraquezas, limitações ou qualidades. Mas tudo isto foi possível porque houve uma abertura suficiente entre os intervenientes para o fazerem.

O facto de nós assistirmos às aulas dos outros, reconhecemos nos outros características e mais-valias que nós não temos, e isso fez também com que eu adquirisse isso da Margarida, características dela, que eu acho que não tenho e são uma mais-valia, que notei que nas aulas dela resultaram. Aquela característica própria dela, 'dá mais liberdade aos alunos', no fundo acabou por se tornar uma estratégia para mim. (Entrevista final)

O desencadear de uma confiança mútua, ao longo do tempo, incita os professores a melhorar a sua prática lectiva, num contexto de respeito pela própria pessoa, como indivíduo com as suas características individuais, que por vezes se revê no papel do outro.

Acho que também houve um crescente da qualidade do nosso trabalho, pelo facto de nós nos conhecermos cada vez mais, de respeitarmos as diferenças que existem entre nós. Não somos iguais em termos de postura e na forma de encarar, isso trouxe uma mais-valia, eu aprendi muitas coisas com a Margarida, e espero que a Margarida tenha aprendido também comigo. (Entrevista final)

Maria reforça estas ideias, especificando mais as vantagens em ter assistido às aulas da colega Margarida:

Nós tomámos notas de coisas que as colegas dizem, coisas que os alunos dizem, reflectimos e pensámos: 'seguiu aquele caminho, até foi mais produtivo; ou não foi tão produtivo e poderia seguir outro caminho. Ou então, eu segui este e decerto

agora estou a ver que esta perspectiva era ligeiramente melhor'. Isso foi a grande mais-valia de ir assistir e ver a concretização dum papel, duma implementação duma determinada tarefa num contexto de alunos muito diferente do meu. E foi uma mais-valia também para os meus alunos sem eles saberem, porque eles nunca souberam que eu fui assistir àquelas aulas. Ajudou-me a encarar algumas situações que aconteceram na minha aula de formas diferentes, porque cada uma de nós adaptou aos nossos alunos, à nossa prática e àquilo que é significativo para nós. (Entrevista final)

Com a observação da acção da outra colega, considerou que, quando leccionasse o mesmo assunto, teria em consideração a apropriação que fez das aulas observadas, o que contribuiu, através da avaliação e da reflexão que fez, para querer modificar a própria prática.

Claro, conseguimos antever situações, conseguimos prever outras situações, conseguimos aperceber que determinada intervenção naquele momento foi muito oportuna, os alunos conseguiram chegar, isso para os nossos vai ser uma mais-valia. Ou então, até alterar algo na actividade, que depois nós vimos que a sua concretização não foi tão produtiva como nós pensávamos, e, alterando alguma coisa, vai surtir mais efeito. Temos que ter também essa capacidade crítica, que não produzimos coisas perfeitas, como ninguém. (Entrevista final)

No entanto, Maria salvaguardou a sua inserção no contexto da escola em que trabalha e do que isso representa em termos da sua orientação educativa, defendendo que o facto de as participantes pertencerem a escolas diferentes enriqueceu o trabalho desenvolvido.

Mas eu acho que nós absorvemos a estrutura do que é a nossa escola e do que é o projecto educativo da nossa escola. Eu acho que nisso, também as escolas são muito diferentes, e nós temos posturas que estão de acordo com o projecto educativo de cada uma e temos posturas nas escolas diferentes. Se trabalhássemos na mesma, provavelmente não ia ser tão enriquecedor, eu acho. Porque nós também levámos muito do que é a experiência da nossa escola, do que é o objectivo da nossa escola, do que é o objectivo máximo encarado da escola, não é? E são perspectivas, eu acho que se notou, totalmente diferentes.

Nesta perspectiva, a partilha de experiências e saberes que se praticou durante o trabalho conjunto desenvolvido extravasou os muros de cada escola. Todavia, Maria focou uma situação de dificuldade que esta equipa de trabalho experienciou:

Eu acho que foi a meio da nossa actividade, quando nós estávamos exaustos com o trabalho, quando nós dizíamos que era o limitar do tempo, ou quando nós dizíamos que o teste intermédio é naquele dia, que sai aquela matéria toda, 'como é que nós vamos fazer?' Eu acho que aí houve aquele momento em que nós pensámos: 'como é que nós achámos que isto é o correcto e não conseguimos vencer porque o tempo não nos deixa.' Dum momento para o outro nós começámos a ver, então este é o caminho certo e nós não vamos conseguir. Mas acho, que dum modo ou outro, acho que escolhemos a melhor solução, não foi? Que foi continuar com este

caminho, apesar de todas as limitações e contrariedades que nos iam surgindo, com mais ou menos esforço nosso, e devemos dizer que isto só foi possível porque os alunos corresponderam, eles participaram de forma muito empenhada. (Entrevista final)

Quando questionada acerca do interesse e da pertinência de ouvir a opinião de uma colega sobre o decorrer da sua aula, na sequência da reflexão realizada, Maria respondeu:

Eu acho que foi muito bom, porque nós criticámo-nos de forma construtiva, nós criticámo-nos de forma colaborativa. Nós tivemos a capacidade de auto-crítica, não é? Mas o outro colega também teve uma capacidade crítica construtiva para connosco. Ou seja, tudo o que nós reflectimos foi de forma a nós melhorarmos. Decerto nós conseguimos valorizar-nos, ou seja, a Margarida valorizou-me em determinados momentos como eu a valorizei, porque também aprendi muitas coisas com ela, claro. E conseguimos. (Entrevista final)

Acerca do balanço que fez sobre o trabalho desenvolvido, do seu impacto nas suas práticas, nas suas concepções sobre a Combinatória e sobre o ensino, Maria referiu:

Bem, eu acho que é assim. No ensino, eu acho que o facto de nós termos trabalhado tão bem em grupo, de termos conseguido gerir todas as dificuldades, de termos conseguido desenvolver tarefas em conjunto, que eu penso que individualmente não conseguiríamos desenvolver tarefas tão ricas, que fossem tão significativas para os nossos alunos, que fossem, no fundo, tão adequadas àquelas que eram as nossas finalidades. Porque, de facto, nós sermos três a pensar é muito melhor e traz-nos mais-valias e perspectivas muito diferentes. Claro que isso decerto vai fazer com que eu vença as barreiras e dificuldades, e pedir a outros colegas ajudas noutras alturas, não é? E de sentir essa necessidade de trabalhar em conjunto.

4.3. O caso Margarida

4.3.1. Apresentação

Com 40 anos de idade e 15 de serviço docente, Margarida é licenciada em Ensino de Matemática e mestre em Educação, área de especialização em Supervisão Pedagógica em Ensino da Matemática. Durante o ano lectivo em que decorreu a recolha de dados, leccionava numa turma de 9.º ano, inserida no projecto “Plano da Matemática”, e em duas de Matemática A do 12.º ano. A turma de 12.º ano, onde decorreu a investigação, já era dela desde o 10.º ano, por isso presenciou-se um ambiente de trabalho calmo, agradável, cordial e de empatia e cumplicidade entre os intervenientes.

Esta turma era constituída, inicialmente, por sensivelmente os mesmos alunos do ano anterior, cerca de 26; no entanto, inscreveram-se no início do ano mais alunos, passando a

turma a ser composta por 32 alunos. Os alunos repartiam-se por disciplinas de formação específica variadas, nomeadamente Geometria, Geologia e Físico-Química, Biologia, Física, Economia e Biologia. Em termos de aproveitamento, Margarida classificou o grupo de alunos como satisfatório. Estes alunos costumavam trabalhar pouco fora da sala de aula, mas durante a aula sentiam-se motivados e esforçavam-se por aprender.

Na primeira entrevista realizada, Margarida referiu que desde muito cedo sentiu um gosto muito intenso pela Matemática:

Sempre gostei muito de Matemática, desde pequenina. Antes de entrar na primária, inclusive, já sabia a tabuada toda. Admirava imenso os professores de Matemática e até os considerava os mais 'espertos'. Nas férias, às vezes, comprava livros e estudava coisas diferentes ligadas à Matemática.

A professora reconheceu também que teve um professor que a marcou positivamente no seu percurso como aluna: “eu lembro-me muito de um professor que tive no 7.º e no 8.º ano. Eu lembro-me, entre brincadeiras, da maneira como explicava. Aí defini que queria ser professora de Matemática” (Entrevista inicial).

Margarida aceitou o convite que lhe foi feito para participar neste projecto, desenvolvido no ano lectivo de 2008/2009, na esperança que poderia constituir uma mais-valia para o seu crescimento profissional: “Eu espero poder ajudar e aprender, com certeza, algumas coisas” (Entrevista inicial). Acrescente-se que foi acompanhante durante 5 anos do programa de Acompanhamento do Ensino Secundário e no ano em curso está a concluir, o 3.º ano de acompanhamento do Plano da Matemática. Frequenta regularmente cursos de formação, sempre no sentido de aprender mais, o que é uma característica muito notória desta professora, afirmando que a formação dos professores será mais enriquecedora “se estiver mais em contacto com as Universidades” (Entrevista inicial).

À semelhança de Poletti (1999, p. 189), para quem, “ao enfrentar desafios, o professor sofre, naturalmente, pressão para mudar”, também Margarida manifestou na entrevista inicial que sempre gostou de desafios, de inovar e de implementar na prática lectiva tarefas inovadoras, tendo em vista desencadear mudanças e contribuir para o crescimento do professor a nível pessoal e profissional. Margarida dizia, em conversas informais e geralmente no final das sessões, que estava cansada das tarefas rotineiras dos manuais, achava que eram sempre a mesma coisa e que gostava de experimentar coisas novas nas suas aulas; nesse sentido, na entrevista final proferiu: “Não me cativa muito estar a usar coisas já feitas, já muito usadas”. Sobre a sua reacção ao projecto, frisou que tentou

sempre aceitar bem e com agrado as tarefas que estavam a ser trabalhadas e fui dando o meu contributo não só sobre o assunto mas também sobre o modo como achava que os alunos poderiam pensar sobre aquilo que estava a ser dado.

Margarida é uma pessoa muito simples e modesta, referindo: “Procuro sempre saber cada vez mais, mas tenho consciência que precisava de saber muito mais para fazer melhor.” (Entrevista final).

Para Margarida, a Combinatória era considerada como um assunto muito difícil, onde ela sentia dificuldades, tanto na sua compreensão como na sua leccionação, dizendo relativamente ao seu percurso escolar: “Senti dificuldade (...) e uma série de condicionantes que acabaram por nunca me envolver muito” (Entrevista inicial). Quando teve que a leccionar pela primeira vez, afirma: “senti como se não soubesse nada” (Entrevista inicial).

Relativamente ao trabalho desenvolvido, considerava que contextos de trabalho colaborativo são potenciadores de mudanças e aprendizagens, mesmo que lentas. A valorização deste tipo de trabalho vem do passado, não constituindo, por isso, uma novidade para ela.

A minha tese de mestrado fala muito sobre trabalho colaborativo. O trabalho das escolas deveria passar sempre por trabalho colaborativo. O ideal até podia ser: as pessoas iam para a escola das 9h às 18h e entre trabalho com colegas, uma parte individual e a parte dos alunos ficaria perfeito. (Entrevista inicial)

Margarida enalteceu o trabalho em colaboração como meio para desenvolver ou reconstruir o seu conhecimento didáctico nos vários contextos em que tem trabalhado, através dos projectos que tem abraçado e reforça a ideia: “acho que é uma boa estratégia para as escolas, os professores trabalharem em conjunto os temas onde têm mais dificuldades.” (Entrevista final). Prefere trabalhar em colaboração do que individualmente, e relativamente à primeira experiência que vivenciou refere:

Até ao Acompanhamento do Ensino Secundário trabalhava muito individualmente, as escolas também. Pensei: ‘isto é mais ou menos assim’. Mas depois, quando tive oportunidade de trabalhar com pessoas que tudo valorizam, porque se pretendia fazer um trabalho em conjunto, fez-me reflectir sobre o tipo de trabalho que eu podia desenvolver.

Mas aqui na escola é um bocado difícil. Também acho que os horários, a maneira como as coisas são feitas, também não facilitam muito. (Entrevista inicial)

4.3.2. Práticas pedagógicas e reflexão

Actividade introdutória

As orientações metodológicas dos actuais currículos de Matemática e as investigações realizadas mais recentemente destacam a importância da actividade dos alunos. O professor deve ser um especialista, capaz de favorecer e orientar o processo de aprendizagem dos seus alunos, sem fornecer os conceitos e conteúdos que estes devem adquirir por eles próprios, sem fazer uso de procedimentos memorizados de forma rotineira. É importante desenvolver nos alunos formas de raciocínio e o interesse pela argumentação e interpretação de situações (NCTM, 1991). Nesse sentido, e para evitar que os alunos façam uso abusivo de rotinas e técnicas, é pedido aos docentes que preparem situações didácticas em que os alunos sejam estimulados a expressar e usar o seu pensamento e a exercer o seu juízo crítico sobre as tarefas realizadas. Neste contexto, esta tarefa foi proposta como introdução ao tema da Combinatória.

Margarida iniciou a sua aula, já com os alunos distribuídos por diferentes grupos, projectando um problema na parede, usando o retroprojector e uma transparência, facultando também aos alunos o enunciado em papel.

Problema – Se tivermos dentro de um saco vários papelinhos escritos com o mês de aniversário de cada aluno, quantos papelinhos temos de tirar para termos a garantia de que pelo menos dois alunos tenham nascido no mesmo mês.

“Quais são as preocupações que o problema suscita? Vão reflectir um pouco”, disse Margarida. A formulação de conjecturas foi iniciada por um aluno da turma e desenvolvida através da participação dos outros. Mário falou em voz alta: “Podem sair os papéis no início, como no fim”.

A professora questionou a turma acerca da compreensão desta ideia de Mário. Os alunos tentaram traduzir com sucesso o seu significado, percebendo, então, que poderiam sair papelinhos com meses iguais no início, e teríamos então duas pessoas a fazerem anos no mesmo mês, mas também poderíamos ter, na pior das situações, alunos a fazerem anos, um em cada mês.

A conclusão é que com um número arbitrário de pessoas teríamos que seleccionar treze nomes para termos a certeza que duas delas teriam o aniversário no mesmo mês. O melhor aluno de Margarida entendeu de imediato formulando esta conjectura; porém, a professora não a validou e propôs a todos pensarem em várias situações e partilharem com os seus colegas de grupo. Margarida era apologista de que, investindo no trabalho em pequenos grupos, os alunos

com menor desempenho sentir-se-iam menos constrangidos para manifestarem as suas dificuldades e solicitarem ajuda, e os alunos com melhor aproveitamento também usufruíam com estas situações, pois necessitavam de organizar as suas ideias e de argumentar em defesa das suas opiniões. A sua concepção acerca deste tipo de trabalho sustentava que as interações entre os alunos são potenciadoras de uma aprendizagem com compreensão num processo de construção activa dos conhecimentos, contribuindo para o desenvolvimento cognitivo de todos, apesar das diferenças ao nível de conhecimento escolar de cada um, pois, na sua opinião, na Combinatória “alunos fracos mas com determinadas capacidades” (Sessão 10) evidenciam-se.

Vários alunos concluíram que, “para ter a certeza, a garantia, temos que ter mais de 12 alunos”, como se verifica no diálogo:

José: Temos que tirar treze papéis.

Margarida: Pelo menos treze, ou...

José: Não, treze.

Margarida: Mesmo treze?

José: Sim, assim temos a certeza que pelo menos dois são do mesmo mês.

Margarida: Diz? Vamos ouvir o que o Mário diz.

Mário: Para o número de meses...

Margarida: Que número de meses?

Mário: Um ano tem doze meses, se tirar treze, pelo menos uma tem que ser igual a um dos outros.

Aluna: Tem que tirar treze.

O tipo de questionamento que a professora levantou e a postura que adoptou perante os alunos – uma atitude investigativa – instigou-os na exploração de todos os caminhos possíveis que se apresentavam com potencial para resolver a situação dada. Assim, como a tarefa era significativa para os alunos, despertando-lhes interesse e envolvendo-os na sua realização, Mário levantou o problema acerca do número de alunos que constituem uma turma, pois há turmas pequenas:

Mário: Os alunos podem ser dez, só?

Aluno: E nascerem em meses iguais.

Margarida: Afinal como é que é? Vamos lá responder ao vosso colega.

António: Temos que ver o saco!

Margarida, ao devolver a toda a turma a questão que Mário levantou, desencadeou nos alunos a necessidade de explorar a situação, formulando conjecturas, argumentando e comunicando resultados que apresentassem. Neste contexto, os alunos não acharam infantil usar modelos previamente construídos pelas professoras nas sessões e levados para a aula com

a intenção de disponibilizar um por cada grupo, caso fosse preciso. Eles, de facto, tiveram necessidade de experimentar, de sentir e de manipular.

Margarida: Temos que ver o saco. Ok. Então vamos dar os sacos, e cada um vai escolher os alunos que quer. Então venham cá, um elemento de cada grupo vem buscar o seu material. Então, cada um dos grupos vai fazer a sua turma. Temos turmas de muitos alunos, temos turmas de Inglês, por exemplo, que têm poucos alunos, ok? E façam a vossa conclusão.

Isabel: Os feijões são os alunos.

Margarida: Os feijões são os alunos. Ok. Simular uma turma com esta quantidade?

Alunos: Não!

Margarida: Havia problemas?

Aluna: Mais de treze.

Margarida: O ideal era o quê?

Aluno: Treze ou mais de treze.

A docente aconselhou uma pausa e propôs “olhar para trás”, revendo o problema com os alunos: “Será que isso significa que se eu extrair os meses dos vossos aniversários de um saco, eu teria que retirar exactamente treze antes de ter duas pessoas a fazerem anos no mesmo mês?” Os alunos foram capazes de ver que este não é necessariamente o caso, porque o primeiro nome extraído pode fazer anos num determinado mês e o segundo também.

Aluna: Treze quê? Treze alunos, professora?

Margarida: Ali a vossa colega não sente que a resposta esteja muito clara.

Aluna: Eles estão a dizer que temos que ter treze para ter a certeza que sai. Que tem treze alunos e que ao décimo terceiro já sai, é isso?

Margarida: É. Concordas?

Aluna: Não.

Margarida: Por que é que não concordas?

Aluno: Até já pode ter saído antes!

Aluna: Exactamente.

Pedro: E se treze pessoas fizerem anos no mesmo mês?

Margarida: Oh José, espera aí. Temos aqui duas pessoas a colocarem uma questão. Temos ali o Pedro e a...

Teresa: Pronto, já respondeu.

Artur: Porque ali no problema diz: ‘pelo menos dois alunos’, pode-se ter mais que dois alunos a nascerem no mesmo mês. Até podem ser doze no mesmo mês.

Como a professora não validou qualquer resposta no sentido de obrigar os alunos a reflectirem, a partilharem ideias e argumentos que considerassem necessários para resolver a tarefa e para questionar a ideia de que só existe uma forma de chegar à resposta, Margarida pegou num exemplo que estava a ser trabalhado num grupo, em que se verificava a situação de duas alunas fazerem anos no mesmo mês, em Julho:

Margarida: Ainda continua insatisfeita. Ora bem, então vamos... A situação do grupo delas foi a seguinte: eu comecei a distribuir os feijões e duas delas faziam anos em Julho, e, portanto, primeiro Julho ficou ocupado e quando peguei no feijão correspondente ao aniversário da outra voltei a colocar o feijão em Julho. Então fiquei logo com dois, certo? E não precisei de treze. Mas a questão é: vamos supor que eu te arranjo... O limite? Qual era a pior hipótese que podia acontecer quando eu estava a fazer esta experiência?

Aluno: Treze, é treze.

Margarida: Tu tiveste a sorte de estar à beira da tua colega, mas qual era a situação pior que podia acontecer?

Aluna: Todos terem um mês.

Margarida: Então, ocorrendo essa pior situação, a 13.^a pessoa, supondo que está tudo esgotado, qual é a hipótese que ela tem de aniversário?

Os alunos, depois de apresentarem as conclusões que emergiram em pequeno grupo e de confrontarem ideias no grupo-turma elaboraram um balanço do trabalho desenvolvido, chegando à resposta correcta. Reconheceram, então, que na décima terceira extracção tinham a certeza de obter, no mínimo, duas pessoas a fazerem anos no mesmo mês, uma vez que, mesmo que as doze extracções resultassem em doze meses diferentes, a décima terceira extracção tinha de ser um dos doze meses já extraídos.

Os alunos concluíram, usando o raciocínio inicial, que vinte e cinco extracções são necessárias para garantir que temos três pessoas com o mesmo mês de aniversário, mas que isso pode acontecer mais cedo. Para se certificar que a aluna que tinha apresentado uma dúvida num determinado momento da aula entendeu, a professora chamou-a ao quadro, desafiando-a a explicar a solução por ela enunciada:

Margarida: (...) a vossa colega que há bocado não acreditava muito. Portanto, ela agora diz com toda a certeza que era 25. Portanto, ela vem aqui...

Aluno: Vai explicar.

Margarida: Explicar como é que com três pessoas a fazerem anos no mesmo dia dá 25. Vira-te para nós. O que é que estás a fazer? Tens aí uns tracinhos.

Aluna: A mesma lógica de há bocado.

Margarida: A mesma lógica de há bocado. E qual era a lógica de há bocado?

Margarida foi insistente, perdendo tempo da aula em verificar e se certificar que de facto a aluna tinha superada a dúvida. Com este procedimento, Margarida fez com que outros alunos mais tímidos e que não se tinham pronunciado compreendessem agora o que inicialmente não tinham compreendido, ajudando-os a chegar à resposta. A professora, ao não controlar devidamente o tempo de discussão, não cumpriu a planificação da aula.

Margarida encorajou os alunos a descobrirem quaisquer regularidades ou padrões perceptíveis nos dados. O melhor aluno de Margarida, porta-voz de um dos grupos, explicou que

para garantir que haverá n pessoas com o mesmo mês de nascimento, necessitamos de extrair $12(n-1)+1$ papelinhos do saco.

José: Para dois e para o três, já explicámos, não é? Para o quatro: são quatro o número de pessoas com o mesmo mês de aniversário. Portanto, para o quatro, para ser, temos aqui 37. Temos que tirar pelo menos 37 papéis para ter a certeza que quatro pessoas vão ter pelo menos... dessas, quatro vão ter o mesmo aniversário. Tem $12+12+12$, já tenho três, mais um que é... que vai repetir. Então tenho $3 \times 12 + 1$. Temos o número de meses vezes o número de pessoas que queremos com o mesmo mês de aniversário, menos um (-1) , mais uma pessoa $(+1)$. Então, é a mesma coisa... Que é para garantir que pelo menos n tenha nascido no mesmo mês, temos que substituir o mês pelo n , então é: $12(n-1)+1$, que é ... são 12 meses do ano, mais o $(n-1)$, que são o número de casos de pessoas com o mesmo aniversário, menos um, que são aqueles que estão já a fazer num mês o aniversário, mais um que é o que vai repetir com um desses.

Uma aluna de outro grupo sugeriu que a fórmula poderia ser $12n+1$ sendo n o número de voltas que se dá no modelo. A turma ocupou bastante tempo a analisar e a debater o significado de ambas as fórmulas apresentadas pelos porta-vozes dos dois grupos no quadro e, no decorrer desta situação de aula, verificou-se que os alunos tinham dificuldades em verbalizar os pensamentos, não se exprimindo convenientemente nem usando um vocabulário que veiculasse as suas intenções, sendo por isso necessária, e ocorreu em alguns momentos, a intervenção da professora no sentido de rectificar frases mal construídas para que todos compreendessem. Perante as dúvidas apresentadas, Margarida solicitou a uma aluna do grupo do autor da fórmula para que esta a explicasse e, reforçando, o autor apresentou vários exemplos de concretização para convencer os colegas.

Na resolução dos exercícios de consolidação que Margarida propôs, intitulados “Verifica se compreendeste”, a professora, no sentido de recuperar algum do tempo gasto nas discussões desenvolvidas, distribuiu um problema por cada grupo e estipulou um certo período de tempo para encontrarem as soluções.

Margarida: Então vamos ver se vocês conseguem resolver outras situações reais e as conseguem interpretar. Nós temos aqui cinco problemas, e cada grupo vai resolver um. Então vou começar a distribuir. Vocês começam pelo 1), o 4), o 3), o 5) e o 2). Vou-vos dar algum tempo para resolverem isto. Que horas são? 11h15? 10m para cada grupo resolver o seu problema e preparar a apresentação, certo?

Notou-se a preocupação do porta-voz de cada grupo não apresentar apenas a resposta. O primeiro procedimento efectuado foi precisamente escrever no quadro todo o processo realizado, e tentaram fazê-lo através de várias ferramentas, nomeadamente usando o diagrama de árvore e adaptando a fórmula descoberta, e concluíram também que a resposta poderia ser imediata utilizando o mesmo raciocínio proposto inicialmente. A postura de Margarida foi sempre a de valorizar todos os raciocínios apresentados pelos alunos, mesmo os errados, fazendo que os alunos abandonassem ou modificassem ideias menos correctas e aproveitando as correctas para chegar à solução. Foi uma aula em que quase todos os alunos se envolveram na discussão no grupo turma, embora, por vezes, fosse evidente a liderança exercida por alguns deles, nomeadamente do José. No entanto, apesar dos seus diferentes desempenhos, o contributo de cada um foi decisivo na dinâmica que se criou.

Reflexão

Margarida assumiu que esta aula foi um desafio que abraçou, porque afinal foi bastante trabalhada nas sessões realizadas e para a qual sentiu necessidade de a preparar de uma forma profunda e pessoal, no sentido de colmatar a insegurança sentida por quem experiencia algo de novo. Não vislumbrava o tipo de questões que emergiriam na acção pedagógica, pois poderiam ser provocadoras, colocando a professora numa situação de confusão e indecisão que comprometeria a aula, desviando o seu sentido e defraudando os objectivos a que a professora e a equipa de professoras se tinha proposto. Estas situações problemáticas e difíceis de gerir são características deste tipo de tarefas e potenciadoras de aprendizagens significativas.

Margarida: (...) Nesta aula da tarefa introdutória, eu tinha organizado a aula... Primeiro, nunca tinha visto essa aula. Foi completamente diferente. Depois, uma vez que era uma tarefa introdutória, tinha entendido que tinha que ver como é que ia pôr, etc., etc. Eu tive necessidade de organizar a aula minuciosamente. Conclusão: eu fiz em casa vários raciocínios. Eu tinha feito: 'se eles me perguntarem isto, pode surgir isto, pode surgir aquilo'. Quando fui para a aula, algumas das coisas que eu tinha pensado que iam acontecer, eles disseram. Ora bem, nesse momento eu já tinha preparado. E mais, à medida que eu trabalhei tanto a actividade, criei-a como se fosse minha. (Sessão 10)

Verificou-se que as intenções da professora e da equipa de trabalho foram concretizadas, em detrimento do plano de aula que apenas se cumpriu por metade. Logo imediatamente a seguir ao término da aula, em conversa informal com Bárbara, Margarida mostrou-se preocupada e desiludida, pois sentiu que não geriu da melhor forma o tempo. Considerou a

discussão no grupo turma muito importante e imprescindível, mas difícil de gerir, expressando que em alguns momentos poderia ter avançado mais.

Margarida: Quero que, por exemplo, me digam em que momento é que eu poderia ter feito uma intervenção diferente. E, obviamente, que muitas vezes é fácil quando as pessoas estão de fora. Porque no momento, e isso acontece, a mim acontece-me muito, se eles estão a trabalhar em conjunto eu estou a ouvir várias ideias ao mesmo tempo. Ou seja, eu passo num grupo, ouço uma coisa; passo noutro, ouço outra; passo noutro. E então, no momento, nós temos que ver das três ou quatro que ouvimos, qual é a mais pertinente e torna-se difícil gerir. (Sessão 10)

A sessão de reflexão decorreu passados uns dias após a leccionação desta aula, tendo-se notado, pela sua postura desde o início dos trabalhos, que a desilusão sentida por Margarida tinha dado lugar a um sentimento de satisfação, sentindo que os proveitos foram superiores. Anuiu que foi uma dificuldade inerente à implementação deste tipo de actividade, onde é impossível fazer um plano de aula concretizável num período rígido de tempo, pois surgem situações imprevistas que levam o seu tempo a ultrapassar, acrescentando o facto de ser a primeira vez que a professora experienciou este tipo de abordagem na sua prática lectiva. Na reflexão realizada surgiu uma sugestão como alternativa. Em vez de chamar ao quadro o porta-voz de cada grupo para apresentar as conclusões, apenas um porta-voz apresentaria as estratégias desenvolvidas pelos colegas do seu grupo, as mais pertinentes, e os outros grupos acrescentariam ideias interessantes não contempladas até ao momento, gerindo a professora as interações estabelecidas e dando oportunidade de ir ao quadro, em outros momentos e outras aulas, os restantes alunos.

Arranjos completos

Tarefas introdutórias. Na sua abordagem metodológica, Margarida incentivou os alunos, organizados em grupos, a partilharem os resultados e as estratégias usadas por cada um nas suas respostas à questão 2 do teste:

2.a) – Com os algarismos 1, 2 e 3 quantos números diferentes de dois algarismos podemos escrever?

2.b) – Com os algarismos 1, 2, 3, 4 e 5 quantos números diferentes de dois algarismos podemos escrever?

De seguida, proferiu: “Toda a gente vai analisar todo o material que tem no grupo relativamente às questões 2a) e 2b). Não quero saber se está certo ou errado, podemos ir mais além, perceber o raciocínio, está bem? Então vá lá!”

Os alunos envolveram-se rapidamente na tarefa proposta pela professora, não só porque era muito significativa para eles, visto assentar num trabalho realizado por eles, mas também por estarem habituados a trabalhar de forma autónoma nas aulas de Matemática. Margarida organiza os seus alunos, desde o 10.º ano, frequentemente, em trabalho de grupo o que potencia discussões ricas.

Durante a aula, verificou-se que quando não havia consenso, os alunos chamavam a professora para os esclarecer, ao que ela contestava: “Têm que referir a estratégia que foi usada, têm que transmitir ou tentar transmitir aquilo que foi pensado pelos vossos colegas, por cada um, na resolução das alíneas a) e b)”. Tendo sido consensual, nas sessões de planificação, a importância das discussões finais no grupo turma, a professora desafiou cada grupo a escolher um porta-voz para expor as conclusões a que tinham chegado.

Paulo: Com os algarismos 1, 2 e 3, quantos números diferentes de dois algarismos podemos fazer? [questão 2a)] O meu raciocínio foi: o número de elementos possíveis elevado ao número de vezes que eu tinha que utilizá-los.

Margarida: Temos aí o 3^2 . E porque é que pões aí um dois? (...) Então tu consegues imaginar ou lembras-te de algum raciocínio antes de chegares a essa analogia?

Margarida, ao longo da aula, foi colocando questões sem validar as respostas dos alunos. Segundo esta professora, os seus alunos não gostam de ser orientados, devendo ser dado um certo tempo e deixar os alunos fazerem algum esforço no sentido de explorar e justificar.

Margarida: (...) Portanto, o raciocínio que tu achas que fizeste na altura foi esse.

Paulo: Se calhar veio do 9.º ano, só que eu não sei, nesta altura não sei.

Margarida: E consegues explicar com outra linguagem naquilo que pensaste?

Paulo: Primeiro fiz assim: 12, 22, 23 ... Se fossem 20 números, como não sei quantos algarismos, não fazia isto, tinha que arranjar outra forma de fazer isto.

Margarida: Ah! Então quer dizer, a fórmula do exercício veio a partir duma coisa que tu fizeste e que eu não vi.

Paulo: Exacto.

Margarida: Ai tu fizeste isso! Então porque é que tu não puseste só 9 e puseste 3^2 ? É que aí deu-te 9.

O aluno explicou que, na sua folha de rascunho, tinha enumerado todos os casos possíveis e escreveu no quadro, tentando apresentar uma expressão, porque no caso de ter muitos elementos não poderia fazer a enumeração. Então, Paulo construiu as linhas da tabela:

	11	22	33
	12	23	32
	21	31	13

A partir da tabela, Paulo parece ter recorrido à fórmula da área do quadrado, definido na tabela, para encontrar a fórmula dos arranjos completos:

eu fiz isto, só que depois tinha que arranjar uma maneira de fazer uma fórmula. E tive a tal ideia de 3^2 . E depois é que lembrei que se podia fazer o número de elementos pelo número de vezes que tinha que utilizá-los.

Antes, Margarida tinha chamado a atenção para a existência de uma enumeração sistemática ou não sistemática, pois Paulo, ao não seguir um sistema para organizar os dados, tinha-se esquecido do número 13.

Alguns alunos usaram raciocínios em que nem nós nem outros alunos, nomeadamente o aluno porta-voz do grupo, tínhamos pensado. Assim, a partilha e o confronto de ideias suscitou a discussão de questões e raciocínios que teriam passado despercebidos, como confirma o diálogo seguinte, em que Paulo apresentou apenas como resposta a expressão $11 > 33$. Na sequência de um diálogo com os alunos, Hugo explicou que 11 era o menor número e 33 o maior, que tinha feito no rascunho a enumeração e que, pela contagem, lhe deu 9. Finalmente, disse com satisfação: “Está explicado. Afinal o 9 tinha um raciocínio”.

Teresa, porta-voz de outro grupo, chamou a atenção de toda a turma para o facto de ter feito uma má interpretação dos conceitos, números diferentes e algarismos diferentes, não os compreendendo e confundindo-os inicialmente.

Margarida questionou o grupo turma sobre, se fosse agora, qual a estratégia que considerariam na resolução desta questão. Uns disseram que usavam o diagrama de árvore, “para ter segurança”, ao que Margarida replicou: “E se tivésseis muitos elementos?” Uma aluna disse que faria uma árvore, ainda que incompleta.

De seguida, Margarida ditou os dois problemas previstos no guião. Depois de ter construído uma tabela e um diagrama no quadro, Paulo fez questão de dizer, com convicção, que queria testar a fórmula encontrada antes. E foi através da discussão em torno das estratégias usadas por Paulo que os alunos resolveram os problemas e generalizaram.

A postura de Margarida, ao longo das suas aulas assistidas, foi querer aprender com as respostas dos alunos e considerá-las como meios para promover a aprendizagem com compreensão. Na consecução de tal objectivo, evitava dar as respostas, desafiando os alunos a encontrá-las por si próprios.

Tarefas de desenvolvimento. As tarefas de desenvolvimento foram ministradas na aula seguinte. Aquando da resolução do problema 1 da ficha, a postura dos alunos da Margarida perante a resolução deste problema de selecção foi idêntica, acertaram com muita facilidade.

Perante o problema 2, classificado por Batanero *et al.* (1994, 1997a, 1997b) como um problema de distribuição, os alunos de Margarida reagiram também com muita facilidade à sua resolução. No entanto, Margarida não validou de imediato a solução, desenvolvendo-se uma discussão durante um certo tempo, como o confirma o diálogo seguinte:

Margarida: Ana! Explica o problema.

Helena: A Alice, a Berta, a Carol e Diana têm dois quartos disponíveis. (...) Como vimos também pelos arranjos, temos as quatro crianças para dois quartos; que fica 2^4 , que dá 16.

Margarida: Mas se eu olhar para o teu esquema, vejo assim: no primeiro quarto ficam quatro, no segundo zero; e depois tens...

Relativamente ao problema 3, os alunos da Margarida fizeram um debate demorado, confrontaram diversas estratégias que surgiram na sua resolução, muito semelhantes às emergidas na aula de Maria, não conseguindo também chegar ao final com sucesso. Neste caso, sem a intervenção da professora, no sentido de orientar os alunos para a solução, perder-se-ia muito tempo da aula e provavelmente desnecessário. Margarida tinha consciência da dificuldade de interpretação e de resolução deste tipo de problemas de partição, pois já tinha assistido à aula de Maria, presenciando a discussão que se tinha desencadeado, e Bárbara tinha fornecido textos de apoio retirados de Batanero *et al.* (1994, 1997a, 1997b). Tendo conhecimento da dinâmica que se induziu em torno desta tarefa, e como a reflexão sobre esta aula também já tinha decorrido, ficou então na sessão assente que seria uma decisão sua ministrar ou não este problema aos seus alunos. Margarida optou, então, por desafiá-los para a sua resolução, não se alongando demasiada no tempo.

Reflexão

Margarida, através da observação e da reflexão sobre a aula de Maria, deixou-se influenciar e invadir por um sentimento de pessimismo, no dia anterior à sua prática, relativamente às estratégias que ela iria implementar, pois não conseguia antecipar situações decorrentes da sua acção pedagógica, não podia definir o rumo que a aula iria tomar. Maria seleccionou cinco tipos de resolução, e, por isso, a discussão promovida limitava-se aquele documento. Em contrapartida, Margarida tinha de conhecer todas as respostas dos seus alunos, cerca de 26, o que tornava a sua acção imprevisível, não podendo levar “receitas” preparadas

de casa para problemas que emergissem, referindo: “Eu sei onde quero chegar, mas desconheço o caminho a percorrer”. Tal imprevisibilidade desencadeou insegurança na professora, como o seguinte excerto nos informa:

Margarida: Eu já no dia anterior estava, entre aspas, com pouca fé na actividade. E porquê? Agora eu tenho que ver, será que eu ter assistido à tua [aula de Maria] me influenciou? Será que o ter visto... Acho que tu tiveste da turma, material muito rico, diferente, eu não tinha. Então eu já estava pessimista relativamente àquilo. E a minha preocupação era, como é que eu hei-de explicar, eu sabia que ia ter dificuldades em que eles conseguissem chegar a uma situação, porque à partida parecia-me que eles já tinham percebido. E então foquei tanto, tanto, naquilo que perdi tanto tempo, que depois não fiz mais nada. (Sessão 10)

Margarida não cumpriu o plano de aula, como seria suposto, pois os seus alunos mostraram-se envolvidos e interessados nas tarefas apresentadas e transferiram esse entusiasmo para a professora, proporcionando-lhes oportunidades para que eles aprendessem a ouvirem-se uns aos outros, esquecendo-se de gerir o tempo. Maria tinha trabalhado com os seus alunos, durante os 90 minutos de aula, os três primeiros problemas da ficha de trabalho e ela não conseguiu chegar lá, ficando a sua resolução para a aula seguinte. Bárbara apresentou alternativas, usando a transcrição da aula, no sentido de Margarida abandonar momentos pouco pertinentes, instigando-lhe outra dinâmica, de modo a colmatar o pouco tempo disponível. Então, a professora comentou na sessão:

Bárbara: Saíste de lá com a sensação que podias ter aproveitado mais.

Margarida: Muito mais. Depois eu digo: ‘em que momento é que eu devia ter parado?’. Neste momento não consigo lembrar exactamente. Eu sei que, mais ou menos como o Bárbara estava a dizer, mas obviamente ainda não li a transcrição da aula, mas quando ler, vai-me ajudar a dizer assim: ‘eu neste momento devia ter...’

Maria: Invertido a situação.

Margarida: Invertido a situação. E às vezes basta um bocadinho... Uma falta de intervenção, um descuido...

Maria: Que conduz à não produtividade ou noutro sentido. (Sessão 10)

Sobre estas aulas podemos inferir o quão necessário é pedir aos alunos que elaborem explicações teóricas e escritas acerca do seu trabalho, verbalizem o seu pensamento de forma a organizarem os seus conhecimentos com a ajuda do professor: “A parte muito positiva em relação a isto, é que realmente, nós como professores, só conseguimos perceber os alunos quando os ouvimos a dizer aquilo que pensaram” (Sessão 10). Em conversa informal com Margarida, depois da aula, ela comentou que, por vezes, os professores interpretam erradamente respostas, como a que o Paulo apresentou no teste. Por ter apresentado apenas o

resultado final, podia pensar-se que o aluno copiou, pois não apresentou qualquer processo de resolução. Sem dúvida, surpreendeu-nos a riqueza do seu raciocínio. Como muitas vezes avaliamos injustamente determinadas situações!

A convicção de Margarida, depois de ter conhecimento da opinião dos seus alunos através do questionário implementado no final da leccionação da Combinatória, acerca do tipo de aulas ministradas, foi assim expressa:

(...) gostei porque nunca me tinha apercebido que era tão importante para eles nós valorizarmos os raciocínios, mesmo aquilo em que eles estavam errados. (...) E o que eu acho ótimo. Acho que eles realmente nos deram, pelo menos a mim, uma grande lição com aquilo que escreveram. (...) Também focaram o facto dos colegas... dos colegas, no fundo, aperceberem-se também dos raciocínios que eles tiveram, e que lhes deu, como eles dizem aqui: 'mais vontade de mostrar de que sou capaz', a auto-confiança. Então, muitas vezes nós falámos em motivação dos alunos, que é colocar uns computadores, uns quadros interactivos, umas coisas, e afinal eles motivam-se mais... [com uma coisa tão simples]. (...)

Talvez o facto de eles terem desenvolvido os seus raciocínios e sentiram que eles estavam a fabricar, no fundo, o conhecimento, deu-lhes demasiada auto-confiança (...). São eles que estão a fabricar o conhecimento e sentem que não estão a decorar, não estão a aprender algo que lhes é impingido, eles estão a sentir de onde vêm as bases, (...) porque vêem a lógica das coisas. (Sessão 14)

Relativamente à implementação dos problemas da ficha de trabalho 2, ministrada em outra aula, Margarida justifica o insucesso dos alunos na resolução do problema de partição, por um lado, pelas dificuldades que lhe são inerentes e que já foram apontadas e, por outro lado, pelo facto de os alunos tentarem adaptar a resolução de um problema a uma fórmula conhecida, que geralmente foi estudada há relativamente pouco tempo.

Não estão habituados, e até houve uma situação que tem a ver com alguma coisa desse tipo, em que na última aula, nos problemas de Batanero, portanto, o primeiro problema era dos números [selecção], era extremamente simples, o segundo o dos quartos [distribuição], também conseguiram com bastante facilidade, e o terceiro não. E não porquê? Porque eles utilizaram a fórmula no primeiro, utilizaram fórmula no segundo e também iam usar a fórmula no terceiro. (Sessão 10)

Margarida, na sessão 10, fez um balanço da sua acção, expressando a sua satisfação por ter implementado a Ficha de trabalho 1, na aula anterior a esta, e verificando que os raciocínios que os alunos apresentaram nos passam ao lado, pois apresentavam dificuldades e raciocínios incorrectos em passos que nos achámos óbvios e que para eles foram complicados de entender. Achou que não perdeu tempo em insistir na resolução e na partilha de dúvidas e dificuldades, pois concluiu que os alunos adquiriram o conceito da regra do produto, que constitui um

conceito básico e transversal necessário para a compreensão dos restantes conceitos. Margarida partilhou ainda connosco o tipo de raciocínios apresentados pelos seus alunos, destacando que, uma aluna assistente, a quem já foi leccionada a Combinatória, sentindo-se muito confiante nos seus saberes adquiridos no ano anterior, demonstrou que, de facto, não tinha aprendido o conceito com compreensão. Margarida tomou consciência de como é uma mais-valia para nós, professores, ter acesso aos raciocínios dos alunos, para que possamos adaptar as nossas estratégias de ensino aos interesses deles, valorizar os conhecimentos que possuem, escolares ou não, de forma a integrarem as novas ideias matemáticas.

Combinações

Tarefas introdutórias. A esta aula assistiram Maria e Bárbara. Para a consecução do que se tinha proposto, Margarida achou que deveria proporcionar, para análise e discussão em pequeno grupo, uma variedade de estratégias contempladas por cada aluno, pois criar-se-ia uma reflexão mais rica e profunda, segundo diz: “fiz os grupos tendo em conta que as respostas dos alunos do grupo tinham alguma variedade”. Margarida explicou a constituição dos grupos no início da aula e distribuiu as folhas com as respostas de cada aluno à questão 4 do teste.

4. Formar grupos de pessoas para participarem num concurso.

4.a) – De entre três pessoas, o Abel, a Berta e a Carla, pretende-se escolher duas para participarem num concurso. De quantas maneiras diferentes se pode fazer a escolha?

4.b) – De entre cinco pessoas, o Abel, a Berta, a Carla, o David e a Eva, pretende-se escolher duas para participarem num concurso. De quantas maneiras diferentes se pode fazer a escolha?

Deu algum tempo, não tanto como ela queria, pois Margarida pretendia avançar mais do que na última aula assistida por Bárbara.

Margarida: O que é que eu quero que vocês façam numa primeira etapa? Vocês vão ver novamente a questão 4), ler o enunciado, fazer uma interpretação, ver o que cada um fez, tentar explicar aos outros elementos do grupo aquilo que fizeram e depois vamos fazer um bocadinho, uma apresentação daquilo que está em cada grupo. Claro que há coisas repetidas. Há coisas que alguns alunos deste grupo fizeram... naquele também se fez, mas não interessa, está bem?

Então vamos fazer a 4a) e 4b), ok? Ora bem, vamos então analisar. Vocês estão a ver com um ar muito feliz, não estão?

Desde logo, a tarefa motivou e despertou muito interesse, pois agradou bastante aos alunos apreciarem novamente os trabalhos que elaboraram no início do ano lectivo. Porém, surgiram alguns problemas, nomeadamente na distribuição das respostas pelo grupo, que condicionaram o desenrolar normal da aula. Tratando-se de uma aula que funcionava como um

turno, era previsto estarem presentes na sala apenas cerca de metade de alunos da turma, mas Margarida tinha pedido, na aula anterior, que viessem todos e, por isso, estavam presentes, nas palavras da professora, “de mau agrado”. Para aumentar o seu descontentamento, “eles tinham feito o teste de Biologia, portanto eu sabia que eles podiam estar um bocadinho instáveis em termos de comportamento. Eu notei que eles duas ou três vezes abriram o livro de Biologia para ver umas soluções”. Assim, apesar de a actividade ser interessante e motivadora, estes acontecimentos contribuíram para desconcentrar a professora, pois Margarida deixou-se contagiar pela onda de insatisfação.

Logo no início da actividade revelaram dificuldades em compreender o enunciado, pois eles achavam que tinhamos de considerar todas as sequências possíveis.

Luísa: Se olharmos para o enunciado diz: ‘escolher duas pessoas para participarem num concurso’, ou seja, nós não vamos dizer que a primeira pessoa vai ser aquela e a segunda pessoa vai ser aquela.

Margarida: Mas a pergunta é: “de quantas maneiras diferentes se pode fazer a escolha?”, não é quantas escolho.

Luísa: Mas as duas vão participar e só depois é que vai sair a outra.

Aluna: Está bem. Mas a pergunta é...

Luísa: Ou seja, pessoas diferentes, e não a ordem das pessoas.

Margarida: O que a Luísa está a dizer...

Aluna: Eu não concordo.

Margarida: Ok. Então, se não concordam, qual é a diferença entre... Eu tenho ali as três pedrinhas, as três pessoas, eu vou escolher duas, mas a primeira vai dar...

Nesta altura, Margarida poderia reformular a questão, dizendo: “Quantos grupos diferentes...” pois, segundo Batanero *et al.* (1997a, 1997b), este erro consiste em considerar a ordem dos elementos quando ela é irrelevante ou, pelo contrário, não considerar a ordem quando ela é essencial. Alguns alunos não conseguiram reconhecer este “erro de ordem”, como se constata no diálogo seguinte:

Margarida: Quem é que apresentou 6, do teu grupo?

Rita: Eu.

Margarida: Tu. E os teus colegas o que é que apresentaram?

Rita: 3.

Margarida: 3.

Rita: O argumento deles é que a ordem que se escolhe não interessa, interessa é o que se escolhe e não a ordem pela qual se escolhe.

Margarida: E na 4b), o que é que tu apresentaste?

Rita: 20, e eles 10. Foi o mesmo raciocínio.

Margarida: E, neste momento que o teu grupo falou contigo, e expôs... portanto, esteve a argumentar, o que é que tu concluis?

Rita: Eu fiquei com a mesma dúvida. É assim, o raciocínio está correcto, o que interessa é as pessoas que se escolhe, mas também, por outro lado, nós também quando escolhemos alguém dizemos, por exemplo, primeiro a Catarina e depois a Ana, e também podemos dizer primeiro a Ana e depois a Catarina; apesar das pessoas serem as mesmas, a ordem é diferente.

Margarida não validou, como é sua prática, qualquer tipo de resposta sem que tivesse sentido que muitos alunos compreendessem. Porém, nesta aula, e depois de se gerar uma discussão em cada grupo, Margarida sentiu dificuldade em esclarecer os alunos, pois não apresentou argumentos convincentes para ultrapassar a situação. Durante a discussão, na maioria dos grupos, os argumentos apresentados pelos alunos que tinham a resposta incorrecta convenceram os que responderam correctamente, como se ilustra:

César: Agora chegámos ao 6.

Margarida: Agora chegaram ao 6. E antes estavam em qual?

César: Estávamos uns no 3 e outros no 6.

Margarida: E tu tinhas 3, Vítor. E agora passaste também para 6. E vocês aqui?

Margarida, perante esta situação imprevista, pois ela em casa tinha pensado: “ora bem, os alunos não vão ter dificuldade em perceber que a solução da primeira é 3 e que a solução da segunda é 10; mas eles vão ter muita dificuldade em compreender a d) e também generalizar”, mobilizou os seus conhecimentos e a informação que recolheu, sugerindo outro tipo de abordagem:

Margarida: Ora, vamos fazer assim. Eu tenho aqui pessoas coloridas.

Aluno: Oh professora, não me confunda.

Aluna: Interessa escolher as pessoas, não interessa a ordem.

Margarida: Não me confunda?! Eu vou-te dar uma pessoa verde, uma branca e uma amarela, pode ser? Anda aqui explicar como é que o teu raciocínio bate certo. Tens aqui as pessoas, pega nelas. Pronto, então fazemos o seguinte, eu seguro naquelas que tu rejeitas. Neste momento eu tenho-as todas.

Aluno: Vou tirar AB.

Margarida: Para já, AB. Para ti contou um caso?

Aluno: Um caso.

Margarida: Um caso. E agora se a trocares de mão?

Aluno: E agora se eu a meter aí e tirar BA, é a mesma coisa.

Margarida: Porquê?

Aluna: São as mesmas cores.

Aluno: Mas são as mesmas pessoas, são é duas maneiras diferentes de escolher as pessoas.

Aluna: Mas neste caso não interessa a ordem com que são tiradas, interessa...

No entanto, Margarida percepcionou que a nova abordagem feita não convenceu de todo os alunos e fez uma nova tentativa no sentido de os persuadir. Como tinha levado de casa

material preparado para este tipo de eventualidade, utilizou materiais e modelos físicos, nomeadamente berlindes com cores diferentes, embalagens de sumos “Compal” e papelinhos, no sentido de tornar o assunto mais significativo.

Margarida: Então eu não vou dizer mais nada. Eu vou pedir que os grupos leiam o enunciado e vão pensar que as pessoas são as minhas pedras. São essas pedrinhas. Eu chego aqui, até com os olhos fechados, e digo: ‘eu vou escolher a branca e a verde’. Ora diz, Teresa. Chico, ouve a Teresa.

Mas nem concretizando, a professora convenceu os alunos. Como se verificou, Margarida proporcionou, em cada momento da aula, oportunidades para que os alunos se ouvissem uns aos outros, pois advoga que em vez de ela falar, prefere ouvir os alunos. É de enfatizar que Margarida demonstrou, neste momento, uma atitude idêntica à frequentemente revelada por Maria, questionar os alunos que responderam como a professora queria que o fizessem: “Quantos alunos que optaram por 6 agora passam para o 3?”

A professora pediu aos alunos para resolverem a alínea d) antes de generalizarem na alínea c). Esta foi uma decisão que Maria tomou nas suas aulas, sobre a qual reflectimos em conjunto nas sessões e que Margarida apropriou e concretizou. A dinâmica que se criou em torno da questão levou a que alguns alunos, como se pode verificar abaixo, descobrissem uma propriedade importante das combinações: $C_2^5 = C_3^5$.

José: Por exemplo, com grupos de cinco pessoas...

Aluno: Cinco pessoas em grupos de dois, dá 10 grupos de dois e também dá 10 grupos de três.

Aluna: É o mesmo que com o dos livros. Porque se estás a fazer de dois, os outros restantes podem fazer outro grupo.

Margarida: Porque é que estás a falar dos livros?

Aluna: Porque escolher os três ou escolher os dois era a mesma coisa. Se escolhes três, os outros que ficam dão outro grupo.

Aluno: Sim, escolher três e rejeitar dois.

Depois de a aluna ter compreendido uma ideia nova por analogia com um problema conhecido, desenvolvendo desta forma o seu raciocínio analógico, em jeito de síntese de tudo o que foi dito acerca desta resposta, Margarida concluiu:

Margarida: O José disse se eu tenho cinco pessoas e escolher duas é o mesmo que... Quem disse foi a Tânia. Olha, diz Tânia. Cinco pessoas, escolher duas, é o mesmo que...?

Tânia: Escolher três.

Margarida: Das cinco pessoas escolher três. Pronto.

Tânia: Se escolher três as outras duas...

Margarida: Então aqui, uma vez que eu não tenho cinco... Oh Tânia, queres explicar o teu raciocínio, porque é que dá igual?

Tânia: Se eu escolher estes três fico com os outros dois, logo, tanto posso escolher estes três como escolher estes dois. Tenho o mesmo número de hipóteses. É a mesma coisa escolher com estes três e com estes dois.

Como se preconiza na investigação, os alunos de Margarida foram capazes de intuir que o número de formas possíveis de escolher duas pessoas entre cinco, para participarem num concurso, é igual ao número de maneiras de escolher as três de entre as cinco que não participaram no concurso, isto é, $C_2^5 = C_3^5$. O que se pretende é que os alunos compreendam que, num conjunto de 5 objectos dados, tomar uma amostra de dimensão 2 corresponde a tomar uma amostra de dimensão $5 - 2$, que corresponde aos objectos que ficam de fora.

Na alínea c) Margarida usou a mesma estratégia que Maria tinha usado nas suas aulas, solicitando ao seu melhor aluno, José, para explicar o seu raciocínio. José escreveu no quadro, recorrendo a um raciocínio recursivo, terminando com a escrita da fórmula.

2 pessoas	_____	1 grupo
3 pessoas	_____	3 grupos
4 pessoas	_____	6 grupos
6 pessoas	_____	10 grupos
...		...
n pessoas	_____	$(n-1)P(n-1)$ grupos, ($P(n-1)$ é o resultado anterior)

De seguida, a professora pediu aos alunos para lerem os problemas 4 e o 5 da ficha 5 (Anexo III), que projectou no quadro, no sentido de serem resolvidos em pequenos grupos. Mas, aquando da sua passagem pelos grupos, percepcionou que, de facto, a maioria dos alunos não tinham feito a apropriação do conceito a que Margarida queria que eles chegassem, e uma aluna afirmou: “Oh professora, por isso é que eu acho mal a professora pôr os enunciados assim. E se eu não sei como é que funciona a lotaria?”. Então, Margarida desafiou-os a jogar o “mini totoloto” e abandonou a resolução dos problemas da ficha, dizendo: “Esta actividade dos dois problemas quero-a na terça-feira para ser discutida na aula. Muito bem pensada!” e, no tempo que restava, os alunos jogaram o mini totoloto, cujo enunciado a professora projectou no quadro, acrescentando: “consiste em assinalar três números num boletim onde figuram os cinco primeiros números naturais. Quantos boletins se devem preencher para haver a certeza de ganhar? Vocês joguem, joguem em grupo, está bem?”.

Com as apostas que fizeram e com o questionamento desenvolvido pela professora, sem qualquer síntese feita, acabou a aula.

Reflexão

Na perspectiva de Margarida, expressa na entrevista inicial, os alunos “têm que aprender a Combinatória muito devagar, tem que ser tudo muito bem entendido”, por isso, logo à partida, Margarida percepcionou que as tarefas que implementaria levariam o seu tempo a serem convenientemente concretizadas. Apesar disso, no desenvolvimento deste projecto de investigação-acção, a falta de tempo foi o maior constrangimento com que se deparou. A realização do teste intermédio estava a aproximar-se, Maria já tinha terminado a leccionação do tema e em todas as sessões de reflexão comentou-se e reflectiu-se acerca deste problema.

As reflexões desencadeadas sobre as aulas observadas de Maria e Margarida, tanto nas sessões como informalmente, possibilitaram a esta professora recolher e analisar informação que mobilizou na tomada de decisões de intervenção na sua acção, perspectivando assim um esforço para mudar e superar dificuldades. Mas os alunos de Margarida, estando habituados a trabalhar de forma independente, demoraram mais tempo do que o previsto e Margarida voltou a não cumprir o plano de aula e não ministrou qualquer tarefa de desenvolvimento. Embora atribuindo os problemas com o tempo ao número de alunos da turma, na sessão, Margarida afirmou, com convicção, que o trabalho que desenvolveu e as estratégias que utilizou foram adequadas, considerando que o papel do professor deveria ser ajudar os alunos a pensar e explorar as suas dificuldades para aprenderem com compreensão.

Margarida: Mas aí é que está. A verdadeira aprendizagem se calhar seria assim, ajudar o aluno a pensar. Este tipo de actividades acho que ajudam, porque realmente apercebemo-nos e ajudámos em função das dificuldades que detectámos. Só que estamos a trabalhar com 30 alunos.

Bárbara: Tu tens 32, Margarida.

Margarida: Sim.

Maria: Mesmo que trabalhasses com 9, não conseguias em 90m. Não conseguias que o conceito de combinações ficasse em 90m, claro que ninguém consegue, porque todos nós sentimos que eles têm efectivamente que trabalhar para além disso. Porque nós temos que lhes apresentar contextos diferentes em que eles possam usar e não sei que mais. Independentemente de serem 10, 12, 30, nunca vai chegar para ninguém, não é? Eles precisam de mais que os 90m. (Sessão 12)

Margarida geriu bem a apresentação das conclusões dos diferentes grupos ao colocar apenas o porta-voz de um grupo no quadro, enquanto os outros grupos foram aditando algo que achassem pertinente, tal como Bárbara tinha sugerido numa sessão anterior.

O problema do tempo voltou à discussão nesta sessão, sobrepondo-se as oportunidades de todos os alunos para aprender em detrimento do tempo.

Maria: Eles nunca vão chegar todos ao mesmo tempo.

Margarida: Não vão chegar todos ao mesmo tempo. Mas a verdade é que nos muitos anos que eu dei o 12.º, eu jamais ensinei aos meus alunos a ligação de raciocínios assim desta maneira. Não expliquei. Se calhar eu expliquei baseado um bocado naquilo que eles estão a fazer, que é ‘querem contar isto? Temos aqui as combinações, servem para escolher. Querem que eles permutem?’.

Maria: Interessa a ordem?

Margarida: ‘Escolher é esta, escolher e trocar é esta...’ Ou seja, se calhar também usei esse raciocínio, e os meus alunos até percebiam. Eu escrevia no quadro e explicava, e pronto, estava feito.

Maria: Mas também nunca te chegou os 90, não é Paula?

Margarida: Não temos desenvolvido nesta área, eu acho que isto vai ajudá-los. Portanto, para mim foi uma mais-valia. Porque eu também estive a ver, estive a estudar para perceber isto.

Maria: Ou seja, saiu fora do âmbito... Não pode sair fora do âmbito do programa nem daquilo que é exigido.

Margarida: Nem saiu.

Maria: Eu acho que nós devíamos questionar desta forma: este trabalho, ninguém duvida que seja rico, há pessoas que põem mais entraves que outras, não é prática habitual em todas as escolas, não é verdade? (Sessão 12)

A professora expôs perante as colegas que o rumo da aula foi totalmente diferente do que o que tinha previsto: “é importante salientar isto, todo o material que usei não foi com esse intuito, usado para aquilo que tinha previsto. Eu tinha feito uma planificação completamente diferente, ia usar esse material para a generalização”.

Nesta sessão de reflexão fez-se uma análise de alguns momentos da aula, tal como Bárbara e Margarida tinham sugerido em sessões anteriores. Considerando que Margarida tinha pedido que lhe apontassem alternativas de actuação, Bárbara entregou às duas participantes a transcrição desta aula com bastante antecedência.

O primeiro episódio interessante que convém relatar está relacionado com a interpretação da frase do enunciado: “de quantas maneiras diferentes”, o que levou os alunos a considerarem a ordem nas combinações.

Margarida: Realmente no cabeçalho da pergunta tinha lá a palavra ‘grupos’, mas quando eles me começaram a falar das maneiras, eu, no momento, não olhei para o cabeçalho, só olhava para a frase. E o que é que eu pensei? Ora bem, eu sou professora de Matemática e estou habituada a este tipo de texto, e para mim, ‘maneiras de escolher’, eu associo... E comecei a concluir que teria alguma dificuldade em mudar aquela opinião, porque também não me lembrei do que estava escrito em cima. Fixei aquilo, o que foi um grande erro, porque perdi muito tempo e não tinha muitos argumentos, ou pelo menos argumentos que me lembrassem na hora, válidos para mudar aquela opinião, de certa maneira eu

comecei a compreender que eles teriam alguma razão em pensar como estavam a pensar. (Sessão 12)

Margarida considerou a sua actuação como menos aconselhada ao leccionar um novo conceito sem que tivesse dado tempo suficiente aos seus alunos para que eles consolidassem a ideia matemática aprendida na aula anterior. A aquisição de um conceito é um processo contínuo, que se vai desenvolvendo através de uma variedade de situações, nas quais o seu uso é imprescindível. É de facto característica desta professora admitir que errou sem qualquer problema ou vergonha, considerando que “errar é humano”; por isso, transferindo esta situação para o contexto dos alunos, nas suas concepções, Margarida valorizou a aprendizagem feita a partir do erro.

Margarida: E houve outro factor que também condicionou, e o erro também foi meu. Primeiro dei os ‘arranjos simples’ e as ‘permutações’ na aula anterior, resolvi muitas situações onde aparecia a palavra ‘maneiras’. Porque às vezes eles dizem: ‘a professora não praticou muito e agora nós já passámos para outro assunto’, e foi com esse objectivo... que perguntei se eles tinham percebido a aula. O que é que eles devem ter pensado?

Maria: Vamos ter que usar agora o que fizemos.

Margarida: Exactamente. Portanto, eu fiz ali logo de início... tomei algumas acções que conferiram uma certa confusão. (Sessão 12)

Propusemo-nos reflectir nesta sessão sobre as dificuldades sentidas por Margarida e observadas por Maria e Bárbara durante a sua prática lectiva e, conseqüentemente, sugerir formas de as ultrapassar; nesse sentido, desenvolveu-se um confronto de ideias. É de enfatizar que este modo de reflectir, de forma partilhada, veiculou o desenvolvimento da capacidade de encontrar alternativas de actuação no palco da sala de aula.

Margarida: Podia ter perguntado ao Paulo: ‘E se o objectivo fossem grupos?’

Maria: Eu até aponteí aqui. Podias ter aproveitado as massas do Paulo, porque ele tinha cinco massas de cores diferentes...

Margarida: Ah, não reparei.

Maria: ‘Dá-me duas massas das tuas’, ele deixou dar duas e não escolheu nenhuma que deu, não é? ‘Dá-me outras duas’, já não me pode dar mais nenhuma. ‘Repõe lá outra vez, dá-me outras duas’. Se memorizasse as cores, por exemplo, o vermelho e o amarelo, porque eles têm aquela barrinha colorida, não é? Dificilmente ele ia tornar a dar a vermelha e a amarela. ‘Continuaste-me a dar duas’.

Margarida: Eu compreendo muito bem o que me estás a dizer e é verdade, porque realmente acontece muitas vezes... Não acontece sempre, porque se nós levarmos a aula muito mecanizada para expor um assunto duma determinada maneira, em que não permitimos que os alunos tomem determinadas posições, abertura... (Sessão 12)

Como constatamos, Margarida tem consciência de que a implementação de tarefas abertas na aula conduz a situações imprevistas, não sendo possível ao professor prever de modo exacto qual será a reacção dos alunos às actividades propostas, mesmo conhecendo muito bem as suas características. Naturalmente, estas dificuldades diminuem quando a aula se centra no exercitar de procedimentos e tarefas rotineiras ou de resolução de exercícios de consolidação, como forma de aplicar conhecimentos adquiridos.

Relativamente ao segundo episódio, correspondente à argumentação incorrecta usada pelos alunos nas alíneas 4a) e 4b), que persuadiu os alunos do grupo que tinham respondido correctamente, Margarida comentou:

Eu entreguei o material e quando eu passei, comecei a ver aquilo que vocês depois acabaram por verificar. Eles começaram todos a considerar que a resposta correcta era 6 e não 3. Ou seja, os que tinham 3 ficaram convencidos pelos argumentos dos outros e daí quando eu passei à vossa beira disse: ‘isto vai ser bonito’.
No tempo que eu andava pelos grupos eu estava a pensar como é que eu ia resolver o problema, mas eu não sabia exactamente o que é que eles tinham pensado para chegar ao 6. Eu estava a ver tudo a decorrer. Aí deu-se a confusão. Eu faço a previsão de uma situação e arranjo uma solução para ela. (Sessão 12)

Margarida assumiu que estava nervosa e, por isso, não fez uma leitura atenta do enunciado. As estratégias não se concretizaram como tinha previsto em casa; no entanto, considerou essa situação natural, dizendo: “outra pessoa, até pode ser mais calma, mais ponderada, poderia ter lido o enunciado, olhava para a palavra grupo... Eu posso em casa definir uma aula com uma dada estratégia, fui eu que a escolhi, e: ‘Como é que é possível? Não deu grande resultado’, e vou implementar a seguir e já consigo.”

Esta professora enfatizou o facto de que, quando se implementam actividades do género das por ela concretizadas neste tema pela segunda vez, é mais fácil antecipar situações que poderão ocorrer, o que possibilita um maior êxito na condução da aula.

Margarida: O ideal, primeiro, uma aula deste género corre melhor quando estou a repetir, quando estou a fazer a segunda vez. Porque quando eu saio da sala: ‘esta situação não aproveitei, aqui podia ter feito de forma diferente’

Maria: Claro. A segunda vez é mais beneficiada, nesse aspecto.

Margarida: Eu não vou repetir o que dei, agora tenho que conseguir chegar a uma conclusão, não podemos andar nisto a semana toda.

Maria: E às vezes aproveitamos os raciocínios dos outros e dizemos: ‘na outra turma disseram-me isto. Reparem, ora pensem!’, e nós usamos os raciocínios dos outros, muitas vezes é muito significativo para eles, falam a mesma linguagem e falam das mesmas coisas. A segunda é mais beneficiada.

Margarida: Eu dei a seguir na D e acho que os da D ficaram, não sei, acho que ficaram a perceber muito bem. Acho. Porquê? Porque eu consegui, a partir do que fiz com a E, ver o que estava a mais e o que precisava de colocar, criar uma sequência mais específica sobre o que poderia tratar, conduzi-os um bocadinho mais. E então consegui, de duas aulas, no fundo, ver o essencial e foquei apenas naquilo, e obviamente que de duas passou para uma.

O tipo de aulas ministradas por Margarida permitiu-lhe aprender para fazer melhor, mudar o que estava menos bem para melhorar a sua prática futura. No entanto, Margarida sentiu que os alunos da turma D não fizeram uma aprendizagem tão rica como os da E, pois na E o debate e a exploração dos problemas propostos foram demorados, permitindo aos alunos discutir as suas ideias matemáticas e experienciar todo o processo de construção de conhecimentos a partir das dificuldades sentidas. Esta professora partilha a ideia de que os conceitos emergem da actividade desenvolvida pelos próprios alunos ao resolverem problemas. Comentando tal facto, a professora proferiu com convicção e entusiasmo:

Resolvi problemas hoje na E e também resolvi alguns na D, e os da E, pois que na D eu fiz este processo mais tarde e eles entraram entretanto nas fórmulas sem terem percebido muito bem, agora têm dificuldade em sair. Então eu pensei assim: ora bem, aquilo que eu fiz com a E acho que é muito rico, claro que eu não posso usar duas aulas nem faz sentido, porque os outros já tinham dado. (Sessão 12).

Margarida saiu desta aula aborrecida, com coisas para pensar e reflectir, mas com vontade de continuar a concretizar este tipo de trabalho, acreditando nas suas potencialidades. Margarida teve presente que, para melhorar a sua prática, é necessário investigar durante a acção, adaptar-se às situações emergentes reconstruindo o seu questionamento, experienciar estratégias novas e reflectir sobre a sua concretização, valorizando o contributo da reflexão conjunta. Teve consciência que só desta forma poderá adequar a transformação da sua prática lectiva ao objectivo de melhorar o processo de aprendizagem dos seus alunos.

No que concerne ao terceiro episódio, considerado potencialmente rico para se fazer uma reflexão em conjunto e que emergiu aquando da exposição no quadro $5 \times 4 \times 3 = 60$, como uma das respostas à questão 4d). Margarida referiu:

ora bem, eu tinha preparado a aula e preparei de acordo com aquilo que tínhamos definido. Quando eu analisei as respostas dos alunos em casa, pensei: (...) mas eles vão ter muita dificuldade em compreender a d) e também em generalizar. Então criei uma série de material com esse objectivo. (Sessão 12)

Margarida mostrou, assim, preocupação na preparação de materiais didáticos para proporcionar aos alunos situações de exploração agradáveis e elucidativas, considerando-os essenciais e valorizando-os na sua acção, talvez influenciada pela sua participação no PAM.

A pequena transcrição que se apresenta deixa transparecer a capacidade de Maria para encontrar e apresentar alternativas, aliás característica muito acentuada desta professora, para a actuação de Margarida relativamente a esta situação.

Maria: Eles gostam de fazer: '1, 2, 3; tem $5 \times 4 \times 3$; já está'. Mas poderiam ter pensado todos assim, teriam é que dividir pelo 3! Porque eles têm na mesma tudo, têm o $5 \times 4 \times 3$, só que a diferença 'é que agora não quero que eles troquem', isso para eles é uma confusão. 'Mas então se os escolheu, agora não quer que eles troquem, como é que escolheu...'. Porquê? Porque eles, o mais concretizável para eles é o $5 \times 4 \times 3$, porque é a regra do produto. Tudo que passa para além disso, é a limitação deles. Achas que de alguma forma... O que é que acontece? Ao conduzir aqui, ao dividir pelos 3!, poderia ter sido mais vantajoso ou não?

Margarida: Era mais vantajoso se eu colocar como finalidade a concretização do plano de aula.

Maria: E para eles? Se tu aqui dissesse assim: 'Ora muito bem, vocês colocaram 60. Quem é que considerou 10?'.

Margarida: Ah, mas é assim, eu considerava que a questão não passava por aí. Estava ligada às 'maneiras', e se eu dissesse, portanto, 'vamos dividir'...

Maria: Não, mas não era dizer 'dividir'. Então muito bem, uma pessoa disse 60 e a outra disse 10. 'Tu disseste 60, escreve as tuas 60 maneiras'. Sim? 60 é um número muito grande, não é? Escreve as tuas 10, não é? Ora bem, quem escreveu 10 atribui um significado às 10, quem escreveu as 60 atribuiu um significado às 60. Os dois podem ter o mesmo significado, porque eles fizeram separadamente, não conversaram, atribuíram o mesmo significado ao mesmo enunciado, esta é a verdade. Mas ou são 60 ou são 10. Vamos analisar esta situação; eu digo: 'A Ana e a Luísa estão na sala?', eles vão dizer 'Sim'; 'olhem, desculpem, a Luísa e a Ana estão na sala?', eles vão dizer: 'Oh professora, já perguntou!', 'Perguntei? Não, não perguntei. Eu perguntei a Ana e a Luísa, não perguntei a Luísa e a Ana'. (Sessão 12)

De seguida, levantou-se um debate interessante sobre a interpretação que cada uma das participantes faz acerca da palavra "fórmula", apresentando cada uma a sua visão:

Maria: Por isso é que eu acho que eles não se prenderam à fórmula, eles prenderam-se a um raciocínio, não escreveram a fórmula. Repararam, eles faziam $20 \times \dots$ não sei quê, nunca escreveram nem arranjos...

Margarida: Estar a fórmula ou estar o produto para mim tem o mesmo significado, e para eles acho que também.

Maria: Ah, então pronto. Eu vi que quando eles fizeram $5 \times 4 \times 3$ eles pensaram nos arranjos.

Margarida: Eu acho que eles não pensaram se é arranjos, foi a maneira que eles associaram à forma de contagem das aulas anteriores.

Maria: Em que interessava a ordem.

No 4.º episódio foram apresentadas, no quadro, respostas à questão 4c) do teste:

– Relativamente à expressão $2n$, uma das respostas apresentadas, Maria evocou o facto de Margarida não a ter explorado. No seu entender, Margarida deveria ter esclarecido os alunos através da confrontação com as respostas correctas às alíneas anteriores, a que eles já tinham chegado. Assim, fez a seguinte observação: a expressão seria válida para a questão 4b), concretizando $2 \times 5 = 10$, mas não o era para a 4a), pois $2 \times 3 = 6$. Na opinião de Maria, os alunos perceberam, “o que aconteceu é que ficou escrito $2n$ como verificando as duas soluções e apenas verificava uma”.

– No que se refere ao raciocínio desenvolvido por José, quando tentou generalizar, descrito antes, surgiu o diálogo entre as participantes:

Margarida: Ou seja, o raciocínio do José é interessante, ele efectivamente conseguiu concretizar...

Maria: Para um número finito.

Margarida: Mas no momento não me interessava muito explorar porque eu achava que todos...

Maria: E nem tinha significância Margarida, porque depois nunca vais conseguir usar este [processo], porque este obriga-te a usar o raciocínio anterior. Devias questioná-lo, quando ele disse que dos 100 fazia 25, ‘então faz’. (Sessão 12)

A exploração deste problema permitiu a José envolver-se em processos de representações e estabelecer conexões entre as ideias matemáticas que impulsionam a capacidade de generalizar e favorecem o desenvolvimento do raciocínio.

– O quinto episódio escolhido foi o do mini totoloto. Neste caso, foi evidente a preocupação mostrada por Margarida ao longo da sua acção, sentindo constantemente a necessidade de proporcionar aos seus alunos tarefas motivadoras e interessantes, que os envolvesse na exploração. Segundo ela, “à medida que as coisas foram correndo eu ia-me lembrando daquilo que tinha. Aquela dos papeizinhos foi na hora... E quando sinto que realmente eles não tinham percebido parei no 4), acho que foi logo no 4): ‘não vale a pena, não vamos andar aqui sempre a insistir’, e pensei que o mini totoloto fosse...”. Deste modo, optou pela realização de jogos, que na sua perspectiva são estratégias potencialmente ricas e menos enfadonhas para os alunos.

Alternativa proposta por Maria, pois na sua perspectiva “não conseguindo concretizar, não se vão conseguir convencer uns aos outros, não é?”

Maria: Queres ver exemplos que entre eles diziam pertinentes? Eles disseram assim, quando falaram de jogar: ‘isso é como um jogo’, e aí temos dois exemplos elucidativos da nossa vivência, que é o jogar com ordem e o jogar sem ordem. Por exemplo, o jogar sem ordem um jogo de xadrez ou um jogo de ténis, a Serena Williams jogar contra Vénus Williams é a mesma coisa que a Vénus Williams...; nós estarmos a jogar xadrez, eu contigo, é o mesmo que tu comigo; mas quando estamos a jogar futebol, Benfica – Porto é diferente de Porto – Benfica. Se eu digo ‘fui ver o Benfica – Porto’ e tu dizes ‘fui ver o Porto - Benfica’...

Bárbara: Quem é que joga em casa?

Maria: Repara que eles próprios queriam ir buscar uma coisa que tivesse significado para eles, que era o jogar, eles estavam presos à situação do futebol; o Porto jogar com o Benfica é diferente do Benfica jogar com o Porto, então eu estar com a Ana não é diferente de a Ana estar comigo? Só é diferente porque é atribuída uma simbologia ao visitante e ao visitado, e no caso do ténis ou do xadrez não é.

Os alunos de Margarida não generalizaram nesta aula mas na seguinte. Segundo a professora, agora, depois da realização do jogo do mini totoloto, os alunos foram capazes de generalizar.

Margarida: É assim, eu peguei no problema do mini totoloto, depois fiz a sequência toda ao contrário, ou seja, comecei no mini totoloto e eles disseram, e eu perguntei porquê, e eles: ‘são 10’, ‘e porque é que são 10?’, etc. etc. Depois pedi-lhes para fazerem o 4 e o 5, e fizeram correctamente. Já não puseram em causa. E depois passei para o d) e depois passei para o c).

Bárbara: E conseguiste generalizar, então?

Margarida: Consegui generalizar. O que é que aconteceu? No 5, eles já tinham entendido mas eu obriguei a criar todas as sequências.

Maria: Eram 24.

Margarida: Eram 24. Coloquei no quadro quatro colunas com todas as soluções e depois eles viam que uma não interessava, a outra também não interessava, expliquei porque é que nós dividíamos e depois andei completamente ao contrário. Só que o que é que aconteceu? No 4 eram de quatro tirar dois, e depois fazia o 2! Tudo bem (...). (Sessão 12)

Margarida seguiu à risca a abordagem feita por DeGuire na resolução destes problemas, por nós adaptados, estudando em casa muito bem a tradução do documento facultado pela investigadora. Apresenta-se, a seguir, o que ela adaptou e escreveu no quadro relativamente ao problema 5 (DeGuire, 1991, p. 66):

ABC	ABD	ACD	BCD
ACB	ADB	ADC	BDC
BAC	BAD	CAD	CBD
BCA	BDA	CDA	CDB
CAB	DAB	DAC	DBC
CBA	DBA	DCA	DCB

Completo a abordagem feita dizendo que há 3 ranhuras a serem preenchidas, com 4 escolhas para a primeira, 3 para a segunda, e 2 para a terceira. Então, há $5 \times 4 \times 3$, ou 24 formas para escolher as 3 letras. Contudo, exceptuando a ordem, algumas destas configurações são as mesmas. Assim, agruparam-se as configurações que representam a mesma por colunas, como é apresentado acima. Portanto, cada uma das configurações inseriu-se numa das 4 colunas de elementos iguais, excepto no que diz respeito à ordem. Dado que partir um conjunto em subconjuntos de 6 elementos sugere a divisão, o número de combinações de 4 bolas extraídas 3 de cada vez é $4 \times 3 \times 2 \div 6$, ou seja 4.

Sendo difícil explicar esta ideia matemática fazendo uso do diagrama de árvore, a professora explorou a operação de combinação a partir dos arranjos simples e das permutações, tal como sugere o DeGuire (1991).

Margarida assumiu nesta sessão que o trabalho desenvolvido em conjunto tinha sido útil, pois nunca tinha leccionado as “combinações” desta forma, escrevendo a expressão no seu caderno, $\frac{n!}{(n-p)!}$ e acrescentando: “contextualizada nos problemas”. Considerou que, de facto, este trabalho desenvolvido constituiu uma mais-valia para o aprofundamento dos seus conhecimentos didácticos acerca do tema.

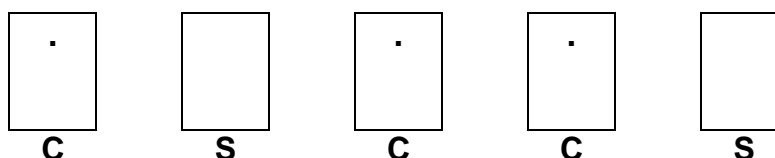
A implementação desta aula, no contexto descrito, constituiu para Margarida um desafio, que abraçou e se transformou num momento importante de aprendizagem.

Triângulo de Pascal

Na aula anterior enfatizámos a participação activa dos alunos na exploração e desenvolvimento do conceito combinações através da resolução de problemas. Nesta aula adaptámos uma tarefa Glaymann e Varga (1973) que se destaca pela sua estrutura, elaborada de modo a organizar-se em várias questões que orientavam a sua resolução e toda a prática lectiva. Apesar de permitir aos alunos formularem perguntas e debaterem no grupo turma, a tarefa condicionou a sua criatividade, permitindo às professoras gerir a sua resolução de forma sequencial e de acordo com as suas concepções da aula.

Tarefa 1 – De quantas maneiras diferentes podemos colocar três bolas iguais em cinco caixas iguais, colocando apenas uma em cada caixa?

Sugestão: Podes uma codificação: a presença de uma bola numa caixa pode ser anotada com a letra **C** e a ausência com a letra **S**, por exemplo:



Como é sua prática, Margarida deu 20 minutos aos alunos para trabalharem de forma autónoma com os colegas do pequeno grupo, de modo a formularem conjecturas para apresentarem na discussão do grupo turma.

Nesta tarefa, Margarida achou por bem levar o seguinte material: “seis caixas e algumas bolinhas, neste caso são pecinhas iguais”. Este material permitiu concretizar o problema introdutório da tarefa e foi usado em vários momentos da aula. Além disso, as características intrínsecas da tarefa permitiram a Margarida, pela primeira vez, cumprir todo o plano de aula a que se tinha proposto.

Pensámos que os alunos compreenderam a construção do triângulo e com a orientação e questionamento da professora chegaram ao pretendido com compreensão.

Desenvolveu-se um debate demorado no grupo turma em torno da questão 1 da ficha (Anexo III), e, através de um questionamento adequado desencadeado pela professora, e do consequente diálogo construtivo que se gerou, chegou-se ao pretendido, sendo necessário frequentemente proceder a momentos de síntese, para não desviar os alunos do caminho pretendido. Verificou-se que os alunos apresentaram dificuldades devido ao facto de não terem apreendido antes as permutações com repetição, tendo sido explorado neste contexto sem qualquer formalização.

A professora abandonou a sugestão apresentada na actividade, o que, do nosso ponto de vista confundiu um pouco os alunos. Então, Margarida tentou transformar o problema num outro mais simples, considerando apenas os números 1 e 2.

Margarida: Então se eu tiver aqui os algarismos 1,2 e 3 quantas sequências com três algarismos diferentes eu posso formar?

Alunos: 6

Ana: 3! Porque se trocam, pode ficar: 1,2,3; 2,3,1; 2,1,3; ...

Margarida: Se eu chegar aqui e colocar apenas os algarismos 1 e 2, ou melhor 1,1,2, só estou a usar o 1 e o 2, mas posso repetir, também tenho 3!?

Aluno: não, são 3. 1,1,2; 1,2,1; 2,1,1, conta a troca deles todos, mas trocar o 1 pelo 1 é a mesma coisa. (...) Tenho que ir ali ao 3!. E dividir por 2!.

Margarida: E esse 2!, que significado é que tem?

Aluno: Para eliminar a troca dos dois 1.

Relativamente a este problema, que se integra no modelo de distribuição de (Batanero *et al.*, 1997a; Dubois, 1984), Margarida explorou dois dos seis tipos básicos deste modelo: bolas iguais em caixas iguais, “digam-se o seguinte: eu tenho cinco caixas iguais e cinco bolas diferentes, como é que eu posso colocar as cinco bolas diferentes nas cinco caixas iguais?”,

acrescentando ainda outra condição sobre o número máximo de objectos que pode colocar em cada caixa, como se verifica nos diálogos apresentados em baixo.

Quase no final da aula, Margarida, na sua passagem pelos grupos, enquanto estes trabalhavam autonomamente na exploração da questão 5.2 da ficha, nomeadamente na construção da linha de ordem n do triângulo de Pascal, reparou que Rita tinha escrito no seu caderno uma expressão incorrecta. A professora mostrou aos seus alunos que estava, também ela, envolvida e atenta a todo o trabalho que eles desenvolviam, e pediu à aluna para ir ao quadro escrever as conclusões do seu grupo. Como é usual, a professora aproveitou a oportunidade e solicitou-lhe que escrevesse e explicasse a própria resposta. Rita escreveu C_{n+1}^n . Este erro permitiu à professora fazer uma avaliação acerca da apropriação do conceito feita por todos os alunos, fazendo uma *reflexão na acção* acerca da resposta dada.

Margarida: O que é que acrescentaste agora? Quando saí não tinhas...

Rita: Tinha, tinha. O grupo tinha, eu é que me esqueci.

Margarida: Vais ter que justificar porque é que querias acabar em $n+1$, mas alguém te convenceu do grupo...

Rita: Eu estava enganada.

Margarida: Estavas enganada porquê?

Rita: Porque eu estava com a lembrança que a linha tinha que ter sempre o n , ou seja, na linha 6, tínhamos 6 elementos mais um, e eu estava convencida que tínhamos que pôr $n+1$, mas não, o último era combinações de seis, seis a seis. Por isso, este tem que ser n 'combinações de n a n ', e não n combinações de $n+1$. O $n+1$ era o raciocínio para o número de elementos, e não o raciocínio para...

Margarida reflectiu durante a acção sem a interromper e interferiu no momento, mostrando a sua capacidade de mobilizar, perante esta situação, toda a informação e conhecimentos que tinha retirado da observação das aulas de Maria, das sessões de planificação e de reflexão, da leitura de textos sobre o “fornecer oportunidades de pôr problemas” (English, 2005, p. 136). Recorreu ainda à sua criatividade para intervir, de forma a adaptar-se a esta situação imprevista, modificando o tipo de questionamento com vista a gerir correctamente este momento de exploração da dificuldade que surgiu, no sentido da sua superação. Para tal, pediu aos alunos para construírem um problema que contextualizasse esta expressão, usando as bolas e as caixas, na linha 6: “Neste contexto eu poderia ter esta situação, C_7^6 ?”. A Rita sugeriu então que seriam 7 bolas em 6 caixas o que não podia ser, visto que no enunciado dizia que em cada caixa só pode ter uma bola.

Margarida: Quem é que consegue traduzir o problema que tivesse que corresponder...

Aluna: Teria que colocar mais do que uma bola...

Xana: 7 bolas e seis caixas.

Margarida: 7 bolas, 6 caixas, também consigo pôr.

Aluna: Mas só pode ter uma bola em cada caixa.

Margarida: Mas seis caixas e sete bolas. Conclui o raciocínio: seis caixas e sete bolas, e o que é que tu querias fazer?

Rita: Tínhamos que colocar mais do que uma bola numa caixa, ou seja, uma caixa ia ter duas bolas. Mas aqui no problema diz que em cada caixa só pode ter uma bola.

Margarida escreveu no quadro, em jeito de síntese, o que em conjunto concluíram, $0 \leq p \leq n$. A aluna formulou um problema a partir do problema dado inicialmente, o que mostrou que desenvolveu uma compreensão estrutural deste problema (English, 1998, 2005). Desta forma, o confronto com o erro constituiu uma poderosa ferramenta para promover uma aprendizagem profunda dos alunos, com implicações na auto-estima de Rita, pois a professora valorizou o seu contributo.

Os alunos de Margarida descobriram algumas propriedades do triângulo de Pascal; porém, a professora achou por bem deixar a sua formalização para a aula seguinte, onde pretendia usar uma forma inovadora de trabalho no que concerne à organização dos alunos. Margarida atribuiu um número aos elementos presentes de cada grupo, de 1 a 5, e informou-os de que, na próxima aula, os números iguais formariam um novo grupo integrando os alunos do outro turno, pois pretendia que estes transmitissem aos colegas os novos conhecimentos adquiridos. Desta forma, criaria momentos significativos de aprendizagem, proporcionando-lhes oportunidades para fazerem uma análise e um debate de ideias mais rico, devido às diferentes conclusões levadas dos grupos anteriores. Assim, a exploração autónoma das situações seria feita no sentido de formularem conjecturas e argumentos, que culminaria numa discussão a desenvolver no grupo turma.

Reflexão

Foi motivo de reflexão acerca desta aula precisamente o momento em que a professora e os alunos abandonaram a sugestão apresentada na questão 1 da ficha (Anexo III), pois Margarida ainda não tinha resolvido com os seus alunos o problema 9 da ficha de trabalho 5 (Anexo III), sobre “caminhos”.

Maria: É engraçado como os alunos interpretam os enunciados de maneira diferente. Isso ajuda-nos depois a reflectir, até acerca dos resultados. Porque é assim, os meus associaram logo as letras que estavam em baixo. O ‘com’ e o

‘sem’. E depois eu ouvi uma aluna tua a dizer que deveria ser: ‘Bola, não bola’, o que tem significado para eles. Sabes porque é que os meus usaram as letras e os teus não? Quando nós fizemos o dos caminhos eles usaram ‘lado, lado, cima, cima, etc.’, e então estavam familiarizados. Com os teus, isto não aconteceu, eles não perceberam que o C significava ‘com’ e o S ‘sem’, por isso não utilizaram.

Margarida: Esta turma não fez ainda nenhum exercício de caminhos.

Maria: Pois, não associou. Os meus familiarizaram-se logo. E desenvolveram todo o ‘triângulo de Pascal’ a pensar sempre naquilo. Porquê? Porque eles pensaram na sequência.

Bárbara: Mas tu, Margarida, transformaste o problema num mais simples.

Margarida: Exacto, transformei num mais simples.

Bárbara: Num mais simples, que funcionou.

Margarida: Funcionou. O que é que acontece? Eu trabalhei o outro, mas na minha prática normal de explicar a alguém, eu pego mais em números.

Maria: A gente procura o que para nós parece mais evidente. (Sessão 13)

Foram apresentadas algumas alternativas de intervenção, designadamente por Maria.

Maria: Eu escrevi aqui... Vamos ver se me oriento ... Eles disseram: ‘se fosse o 1, o 1 e o 2’, e depois eu até escrevi aqui assim: ‘ora bem, não poderia ser o 3! Porque ...’ mas isso até foi o que eles concluíram. Mas eu tinha dito assim: ‘e se fossem quatro, se fosse o 1, 1, 1, 2’, pronto, que era para eles concluírem que tinham que pensar neste e neste também, porque eram iguais. E escrevi aqui à frente: ‘e se aumentássemos...’. Era isso, ir aumentando. (Sessão 13)

Foi ainda sugerido que a professora poderia ter informado que, como as bolas são iguais, interessava apenas os lugares que as bolas iam ocupar no conjunto das 5 caixas: C_3^5 . A outra alternativa apontada foi a transformação do problema 1 da ficha no problema: Encontrar todas as palavras de cinco letras que se podem escrever com três C e dois S ou determinar o número de palavras, com ou sem significado, que se podem formar com as letras da palavra CCCSS. Neste caso, há 3 letras C, como as 3 letras são iguais, não interessa a ordem porque se dispõem, mas sim o lugar que vão ocupar no conjunto das 5 letras: C_3^5 , restam 2 lugares. Como há 2 letras S e também não interessa a ordem porque se dispõem, mas sim o lugar que ocupam no conjunto das 2 letras: C_2^2 . Logo, seria $C_3^5 \times C_2^2$. Outra sugestão, talvez a mais simples, seria usar as permutações com repetição que a professora não tinha leccionado. Este momento constituiu uma situação rica de aprendizagem para as professoras, porque partilhámos conhecimentos ao descrevermos os vários processos de resolução do problema.

Binómio de Newton

A esta aula assistiram novamente, Maria e Bárbara, e iniciou-se pela organização dos alunos em pequenos grupos.

Margarida: Vocês estão habituados a trabalhar em grupos de cinco, mas hoje vamos trabalhar em grupos de três. Se quiserem podem fazer grupos de quatro, três ou pares, está bem?

Aluno: Três ou pares?

Margarida: Três ou pares. Vamos ler em conjunto o enunciado.

Os alunos de Margarida estavam habituados a trabalhar em grupos com mais de quatro elementos, e não reagiram bem a esta proposta da professora e, como ela não estabeleceu um número preciso de elementos por grupo, eles organizaram-se em dois grupos de 6 elementos e quatro grupos de 4 elementos.

No sentido de facilitar a compreensão do que se pretendia fazer na aula, foi distribuída, pela professora, uma ficha sobre este tema (Anexo III). A estrutura desta ficha era semelhante à implementada na aula assistida anterior, orientando muito a acção do aluno de modo avançar no tema. Mesmo assim, Margarida concedeu algum tempo para que os alunos analisassem e reflectissem sobre as questões nos grupos, como é prática nas suas aulas.

Durante a realização desta actividade surgiram ocasiões em que foi preciso fazer a ligação com outras ideias matemáticas já estudadas, nomeadamente “áreas”, “volumes”, “potências”, “quadrados de um binómio”, “cálculo de probabilidades” e o “triângulo de Pascal”. Foi importante estabelecer essas conexões, relacionando o que tinham feito, por exemplo há duas aulas atrás, quando foi leccionado o “triângulo de Pascal”, com o que iam fazer agora. Esta prática permitiu levar os alunos a reflectirem acerca do que foi estudado, verificando deste modo se interiorizaram ou não os conceitos. Relembrar matérias já estudadas é muito importante pois permite ao professor identificar dificuldades que persistiram e avaliar também o trabalho realizado. Foi através de perguntas colocadas aos alunos que a professora os envolveu no diálogo, promovendo a integração de assuntos já estudados e das novas ideias.

Neste momento, a dinâmica da aula estava sustentada num questionamento orientado pela professora e por Tiago, que respondeu correctamente a todas as perguntas.

Margarida: Então, qual foi o raciocínio que tu fizeste para dizeres que está certo? Estamos-nos a referir exactamente a quê?

Tiago: Ao triângulo de Pascal.

Margarida: Ao triângulo de Pascal, estamos a aplicá-lo para quê?

Tiago: Para desenvolver o binómio.

Margarida: Serve para desenvolver. E que parte é que está ali do triângulo?

Tiago: Os coeficientes.

Margarida: Os coeficientes. Bem, alguém quer confirmar com outra situação?

Aluno: A parte literal é o contrário dos coeficientes. Os coeficientes começam em um e a parte literal...

Aluna: Os coeficientes são o contrário dos expoentes.

As perguntas feitas são específicas, pouco abertas, mas revelaram-se necessárias para manter o diálogo. Os alunos realizaram, assim, com êxito a tarefa, questionando, por fim, a professora: “Alguma dúvida que queiram colocar? Toda a gente percebeu? Ficaram satisfeitos com a descoberta? Bem, então vamos agora para a 1.3, está bem?”

Questão 1.3 – Observando as faces do cubo da Maria, o João decidiu criar um jogo. Desenhou uma figura F_1 de área A_1 numa das faces e numa outra uma figura F_2 de área A_2 , construindo dois alvos:



O João (F_1) e a Ana (F_2) lançam em simultâneo, cada um uma seta, para o respectivo alvo, e sabe-se que os dois acertam sempre num ponto dos respectivos quadrados.

1.3. Considera a questão: *Qual a probabilidade dos dois acertarem nas respectivas figuras?* Indica o significado, no contexto apresentado, de $(a + b)^4$ e escreve uma expressão simplificada desta potência.

Na questão 1.3 surgiu um problema, pois na fotocópia que a professora entregou aos alunos desapareceu o “alvo” da figura e então gerou-se alguma confusão, porque os alunos faziam uma interpretação e a professora, desconhecendo o que se passava, orientava-os para outra. Só perto do final da aula é que Margarida se apercebeu, quando uma aluna lhe apresentou a fotocópia para tirar uma dúvida. De imediato, a professora chamou a atenção dos outros alunos para este facto.

Durante esta aula, a prestação dos alunos de Margarida foi exemplar, mas voltou a não cumprir todo o plano da aula.

Reflexão

Relativamente a esta aula, Margarida assumiu com toda a convicção que tirou proveitos deste trabalho desenvolvido ao longo dos três meses. Valorizou deveras a prática de Maria, embora admitisse não se identificar com a sua postura na condução da aula.

O que acontece é que, por exemplo, eu e tu temos uma maneira de ser diferente. Não quer dizer que eu muitas vezes não seja como tu, mas eu tenho um comportamento mais parecido contigo, quando tenho mais pressão do tempo. E eu também acho que é importante, e por isso é que eu comecei a controlar mais. (Sessão 13).

Ao valorizar a acção da colega, Margarida baseou-se nela para melhorar, prever e tentar adaptar, através da reflexão, à sua acção futura: “bem, então vou analisar a aula de Maria a partir disto, vou perceber bem as dúvidas dos seus alunos. E depois vou ver como é que os meus vão reagir” (Sessão 13). A professora distanciou-se de Maria ao referir: “Eu li aqui que tu... portanto, havia um diálogo entre ti e os alunos, mas o diálogo directo não vou fazer, porque os meus não estão muito habituados a fazer logo de início” (Sessão 13).

Como já foi focado em análises anteriores, Margarida relevou uma exploração conveniente das tarefas que tanto apreciou, em detrimento do constrangimento apontado ao longo das sessões de reflexão, o factor tempo, dizendo: “ou os guiava, e aí também perdia o interesse de estar a fazer uma actividade tão rica; ou os deixava, e eles..., como sabes, estou muito atrasada. Muito atrasada, também não bem assim (Sessão 13).

Margarida salientou também o interesse da experiência em relação à actual avaliação de desempenho dos professores, referindo: “isto até nos vai servir de exemplo se, por acaso, vamos ter aulas assistidas. Sabemos o objectivo, não conhecemos o percurso, temos que estar muito atentas a todas as deixas”. Referindo-se ao diálogo referido, a professora manifestou o seu grande agrado pelo sucedido, afirmando: “Para mim foi com grande satisfação que o Tiago se lembrou de começar a dizer aquilo”.

Relativamente à questão 1.3 da ficha, Margarida abordou a questão da fotocópia em que faltava o alvo.

Margarida: A minha grande preocupação... o grande problema da aula foi na ficha. E porque é que a ficha teve um problema? São estas coisas que a gente não se apercebe no momento. É que nas cópias o alvo tinha desaparecido!

Maria: Ah! Pois, o desenhinho. A estrelinha!

Bárbara: Pois, por isso é que eles diziam que o alvo era o quadrado.

Margarida: Mas eu não me apercebi. Eu era assim: ‘Bem, isto...’

Maria: Por isso é que eles....

Margarida: Eu tinha as cópias, mas a que eu tinha comigo estava completa... Mas tinha entregue isto [sem o alvo].

Maria: Tinha as estrelinhas.

Margarida: Tinha as estrelinhas. Ora bem, então a minha confusão na aula era assim: ‘Onde é que eles vão buscar... mas isto tinha um alvo’. (Sessão 13)

Margarida mostrou, mais uma vez, ter apropriado atitudes assumidas por Maria na sua prática, nomeadamente quando solicitou aqueles alunos que conhecem o tipo de resposta pretendida pela professora, através de questões de confirmação e focalização. Contudo, na reflexão conjunta ela assumiu, efectivamente, que não é uma opção correcta, pois acaba por

não dar a oportunidade a outros alunos mais tímidos ou por ignorar ideias interessantes porque não os ouve. Por vezes, quando se desenvolve a discussão no grupo turma, torna-se evidente a liderança exercida por alguns alunos, porque o professor não estimula outras intervenções. No caso de Margarida, verificou-se, ao longo da sua prática, que usou o que os alunos diziam para construir a sua própria resposta.

Margarida: (...) deve ser sem querer, ou então, em determinadas alturas, acho que me dá mais jeito, ir directo para este ou para aquele [aluno]. Mas é pena que seja assim, porque pode haver... Por exemplo, o Rui, o Vítor também é muito participativo, a Ana começou a participar, eu nem tinha dito nada, muitas vezes eles falam e nós não ouvimos.

Bárbara: Mas tu pegas sempre no que eles estão a dizer.

Margarida: Mas muitas vezes eu não ouço o que eles dizem. Ou seja, é muito difícil estares na sala de aula, e pode estar um grupo ou um aluno longe que diz algo muito interessante e não se ouve. Pronto, e perde-se ali uma oportunidade.

Perante a diversidade de alunos que temos, é difícil prepará-los para assumirem um papel activo na construção dos próprios conhecimentos. No entanto, uma atitude de abertura à experimentação de novas estratégias de aprendizagem, sem receios, como Margarida revelou, poderá contribuir para melhorar as práticas pedagógicas dos professores.

Margarida assumiu durante estas aulas um papel pouco activo, implementando uma acção pedagógica inovadora. Porém, ela reconhece, assim como a outra professora que participou neste projecto, que algumas abordagens tradicionais não se podem dispensar. É na conjugação das várias abordagens, recorrendo ao que de melhor nos oferece cada uma, que contribuímos para o sucesso dos nossos alunos na aprendizagem.

4.3.3. Conhecimento didáctico

Conhecimento do conteúdo

Domínio do conteúdo. Margarida assumiu, desde a entrevista inicial, não ter um conhecimento muito aprofundado da Combinatória. Já na aprendizagem do tema, enquanto aluna, sentiu dificuldades e a aprendizagem que fez para poder ensinar decorreu do esforço de estudo pessoal e da experiência que foi desenvolvendo no próprio ensino.

Sentia-me muito insegura, por isso também não queria transmitir essa insegurança para os alunos. Então escolhia exercícios mais simples, daqueles em que a contagem é praticamente directa. Também foi num ano em que as Probabilidades praticamente não saíam nos exames. (Entrevista inicial)

A professora referiu que no acompanhamento da implementação dos novos programas do ensino secundário teve uma formação durante uma semana, onde aprendeu “muito sobre o assunto. Muito, quer dizer, mais sobre o assunto”. Sobre o trabalho colaborativo que desenvolvemos durante os três meses, Margarida refere:

A primeira ideia que eu tive quando começámos a ver as tarefas foi que sabia menos do que aquilo que eu pensava. Quando nós pegamos no conteúdo e pensamos em utilizar o material que já estávamos habituados a usar, aquilo pode criar alguma atrapalhação no início, recordar uma ou outra coisa, mas depois é igual. Portanto, é quase como andar de carro quando se está muito tempo parado. Mas quando temos que reflectir nas coisas noutra perspectiva, começamos a pôr em causa algumas concepções que tínhamos sobre alguns assuntos, inclusive: ‘Será que eu estava a pensar bem? Mas afinal porque é que eu pensava assim? Mas afinal isto é assim e não é como eu pensava? E porque é que agora se faz assim?’ (Entrevista final)

Margarida admitiu ter reaprendido o conteúdo já estudado no ensino secundário e universitário e através da prática, durante os seis anos que leccionou a Combinatória, salientou o estabelecimento de relações entre as quatro operações combinatórias leccionadas e o ter dado sentido às fórmulas e procedimentos matemáticos.

[Com este trabalho fiquei] mais esclarecida. Uma coisa é ver os conteúdos e perceber, lá está, as ditas fórmulas ou a maneira como... o que é que aquilo conta, eu sei o que as combinações, o que é que estão a contar. Eu nunca tinha estudado e visto é a relação que no fundo existe entre as várias técnicas de contagem desta maneira. Nesse sentido ficou muito mais claro e foi muito importante. (Entrevista final)

Margarida leccionou as “combinações” depois das “permutações”, fazendo uma abordagem como é preconizado por DeGuire (1991) e planificada em conjunto nas sessões, mas mostrou-se um pouco insegura na gestão da discussão das tarefas implementadas. Só na segunda aula das “combinações” é que explicou a divisão como sendo a partição de um conjunto de dimensão n em subconjuntos de dimensão p e esclareceu as dificuldades que surgiram durante a primeira aula. Podemos considerar que Margarida não mostrou uma capacidade de improvisação para tomar uma decisão acertada, no sentido de resolver a situação problemática com a qual se deparou logo no início da primeira aula.

Esta docente, com a sua postura em assumir modestamente o conhecimento pouco profundo que possuía da Combinatória, admitiu que a sua participação nesta investigação correspondeu às suas expectativas, contribuindo para aprofundar o seu conhecimento.

À medida que ia estudando e vendo, ia sentindo que tinha feito um péssimo trabalho nos outros anos. Fiquei muito mais esclarecida, e não sei se isto se passa com as outras professoras, mas realmente fiquei a perceber e a pensar: 'Será que nos outros assuntos também ando assim a leste?' (Entrevista final)

Natureza e a estrutura do conteúdo. Margarida tinha uma visão compartimentada da Combinatória, uma visão redutora, pois não reconhecia as relações existentes entre as operações combinatórias ensinadas, como foi referido, e só com um conhecimento profundo dos conteúdos pode o professor estabelecer ligações entre eles e responder com segurança e pertinência às questões que os alunos colocam. Quando questionada acerca da definição do conceito, ela respondeu: "São todo um conjunto de técnicas de contagem. Tem várias aplicações. Uma das aplicações mais imediatas é no cálculo de probabilidades. Na vida, ora bem, a Combinatória utiliza-se na teoria dos grafos, muitos problemas são resolvidos com Combinatória" (Entrevista inicial).

Esta visão instrumental e acabada atribuída à Combinatória, na entrevista final foi alterada, pois Margarida mudou um pouco o seu discurso e defendeu a utilização de estratégias intuitivas e formais:

Portanto, é uma maneira de contar algo que é muito lógico, como se deve contar, não é nada de forçado ou imposto, é algo natural e que apenas se coloca no aspecto mais formal porque o número de elementos assim o requer. Caso contrário, com poucos elementos podia ser feito com os modelos, ou duma maneira organizada, ou visualizando. É assim que eu entendo a Combinatória. (Entrevista final)

Em termos de Programa e quanto à utilidade da Combinatória, Margarida sustentou:

A aplicação dá-se depois para resolver problemas da vida real, é isso que está no currículo. Mas a Combinatória, para mim, serve para muito mais, porque no fundo nós temos essas técnicas, os alunos terão essas técnicas no dia-a-dia. Nós estamos a preparar alunos também para enfrentarem problemas, para se adaptarem a situações, para pensarem de forma lógica sobre situações. É importante no desenvolvimento pessoal e social do aluno. (Entrevista final)

Conhecimento do currículo

Recursos. Margarida mostrou sempre um conhecimento profundo do currículo, nomeadamente dos materiais curriculares alternativos disponíveis para leccionar um determinado conteúdo dentro de um nível de escolaridade.

Este ano [2007/2008] utilizei menos os computadores do que o ano anterior porque não tive oportunidade, não tinha sala. Mas utilizo alguns programas de software, em termos de 11.º ano. Utilizei duas vezes o quadro interactivo, mas

também não tinha, porque ele entretanto ficou avariado. E, portanto, em 90% das aulas uso o quadro e o diálogo. A reflexão baseada muito no diálogo, que acaba por ser às vezes tão ou mais eficaz do que o uso do computador, onde é importante a visualização. Para dar um exemplo, este ano utilizei o programa *Geogebra* para explicar as transformações das soluções racionais e, portanto, aquilo percebe-se bem, os alunos perceberam bem, no estudo das assíntotas. (Entrevista inicial)

Margarida considerou também limitativo o facto de a escola não possuir condições físicas que proporcionem a concretização do currículo: “Não temos meios físicos que nos permitam levar avante a maior parte das estratégias. São-nos pedidos constantemente estratégias diferentes, mas todas, quase todas elas, esbarram com a falta de recursos. E andamos sempre à volta disto.” (Entrevista inicial)

Sobre o currículo, destacou a seguinte contradição: “O programa refere o uso de recursos, materiais e outros, de que nós não dispomos. Portanto, eu nunca consegui até agora cumprir o programa, eu consigo é abordar os conteúdos, agora cumprir o programa, não” (Entrevista final).

Para além destes recursos, esta docente considerou uma mais-valia o uso de materiais físicos, encarando mesmo os manipuláveis como adequados para fazer uma aprendizagem com compreensão, ainda que seja ao nível do 12.º ano e no ensino da Combinatória.

Não acho que seja infantilidade nenhuma, muito sinceramente. Acho que deve ser uma utilização perfeitamente normal e não aceito muito bem até, em relação a isto, que os alunos digam que estamos a infantilizar. Não. Estamos a raciocinar, a concretizar, a analisar e a trabalhar. Mesmo daqueles que dizem: ‘Ah, o aluno é mais inteligente e, portanto, não precisa disso’, há qualquer coisa aí que falha. (Entrevista final)

Tarefas. Além dos materiais, Margarida teve em conta as orientações programáticas, pois mostrou conhecer todos os tipos de tarefa matemática que pode implementar numa aula, de acordo com o objectivo a que se propõe, referindo: “As que eu valorizo mais ainda são as investigações, porque são aquelas que permitem realmente que os alunos, de acordo com as suas experiências, de acordo com as suas vivências até fora da escola, possam aplicar esses conhecimentos na sala de aula” (Entrevista inicial).

Não descurou também a importância que confere à resolução de problemas: “Se quero explorar um assunto, aquele problema [mesmo sendo do manual] dá-me quase para uma aula, se for com a participação dos alunos; portanto, utilizo muito isso. Eu dou muita importância aos problemas, logo que posso...” (Entrevista inicial). Neste caso, destacou a opinião dos alunos sobre os problemas ligados à vida real, que gostaram de resolver,

eles salientaram realmente os exemplos práticos, portanto gostaram do tipo de problemas [que trabalhamos nas aulas], gostaram das abordagens, sentiram-nas muito práticas, muito ligadas ao dia-a-dia, o que é muito bom. Os exercícios da vida real, sempre; a maneira diferente como foram feitas as abordagens [na Combinatória]. Portanto, resumindo, os trabalhos em grupo, a valorização dos raciocínios, a descoberta, a dinâmica que surgiu na sala de aula. (Sessão 14)

Margarida referiu que, de forma bastante explícita, o programa está repleto de novas metodologias,

dos nossos programas de Matemática, as novidades são tantas que requerem que estejamos sempre em formação, e, muitas vezes, quando trabalhamos com alguma coisa, neste caso nas tarefas ou com software, eu fico mais actualizada relativamente a esse aspecto. Mas não consigo ter um conhecimento de tudo tanto quanto gostaria. (Entrevista final)

Também mostrou familiaridade das relações entre os temas que está a leccionar com os que foram leccionados durante os anos precedentes e aqueles que serão leccionados no futuro, bem como dos materiais que lhes servem de recursos – o conhecimento vertical do currículo (Shulman, 1993).

A Combinatória já se dá na primária, num sentido muito restrito. Mas eu penso que ela é tão rica que se devia dar muito mais cedo. E penso que, por exemplo, as Probabilidades do 9.º ano ficam muito aquém do que poderia ser feito, porque ajuda na comunicação matemática, a estruturar o raciocínio, ou seja, é um assunto que tem tantas potencialidades que deveria ser tratado mais cedo. (Entrevista final)

Objectivos. Teve em conta os grandes objectivos do ensino do conteúdo e das competências de ordem superior a desenvolver nos alunos: “Eu acho que [a Combinatória] permite aos alunos desenvolverem o raciocínio porque requer reflexão, concentração, comunicação, que são características também muito importantes para o estudo e para o desenvolvimento dos alunos.” (Entrevista final)

Durante as várias sessões de reflexão que decorreram, discutiu-se com frequência a capacidade de abstracção que a maioria dos alunos não possuía para realizar as tarefas de Combinatória propostas, e, relativamente a isso, Margarida sustentou a seguinte opinião:

Os alunos têm realmente dificuldades na abstracção, mas é uma coisa que tem que ser trabalhada. Até a vivência que têm fora da escola ajuda a desenvolver esta capacidade, muitas vezes mais do que até dentro da escola. (Entrevista final)

Gestão do tempo de leccionação. Relativamente à extensão dos programas e ao tempo disponível para o implementar, Margarida advogou serem de difícil compatibilização, referindo:

Eu pessoalmente não consigo, não consigo da maneira que gostaria. Também é verdade que não tenho tanta experiência quanto isso, e por isso muitas vezes no diálogo que eu tenho com os alunos posso estar a demorar mais tempo do que o que devia, estar a fazer abordagens desnecessárias, estar a perder tempo por aí, e não conseguir sintetizar as coisas no momento oportuno, e, portanto, acabo por me dispersar. (Entrevista final)

Durante a sua prática, verificou-se que a gestão do tempo constituiu o maior constrangimento com que Margarida se deparou, pois das cinco aulas assistidas, apenas em uma, onde leccionou o triângulo de Pascal, cumpriu o plano de aula estabelecido. Em consequência, foram frequentemente sugeridas estratégias de superação desta dificuldade nas sessões de reflexão.

Margarida acabou por admitir que, para tentar concretizar o currículo, por vezes se socorre dos manuais, chegando à conclusão que estes acabam por constituir um constrangimento:

Ora, muitas vezes, os manuais em relação a um assunto referem muitos aspectos, se calhar mais do que o necessário. Mas pego em dois ou três manuais, e se outro ainda tem mais assuntos que aqueles, eu pela leitura não compreendo o que é que eu devo dar exactamente. Portanto, se o programa já é extenso, eu sou capaz de, para cada assunto, procurar cinco ou seis manuais e fazer com que o assunto fique o mais completo possível. E então os professores sentem-se insatisfeitos, porque se não conseguem fazer tantas abordagens quantas viram em não sei quantos manuais é porque aquilo não estará bem dado ou não estará completo. Então tentamos abordar tudo e mais alguma coisa, dentro ou fora do programa, o que faz com que não dê tempo para outros aspectos. (Entrevista final)

Conhecimento sobre a aprendizagem

Processos cognitivos. Margarida defendeu que os alunos têm de ter tempo para pensar acerca dos problemas de Combinatória. Esse seu ponto de vista foi afirmado na entrevista inicial e reiterado na entrevista final.

Têm que aprender a Combinatória muito devagar, tem que ser tudo muito bem entendido. Ou seja, tudo aquilo que se acrescenta tem que se explicar porquê. Uma situação, por exemplo, que os alunos confundem e muitos professores também não sabem muito bem porquê: uma mesa em que os alunos... em que os lugares estão numerados, e quatro lugares/quatro pessoas, uma mesa redonda, dizemos que o número de situações possíveis é quatro factorial [4!], mas se a mesa continuar redonda e tirarmos a numeração, passa a três factorial [3!]. E aí explica-se aos

alunos que não existindo referencial, teremos que considerar o lugar, etc., etc. Esta justificação, que para mim ainda continua muito confusa, eu penso que os alunos nunca a entendem muito bem, porque o professor também, certamente, não a entendeu muito bem. (Entrevista inicial)

Esta professora viu as dificuldades sentidas pelos seus alunos à imagem da insegurança por ela experienciada neste tema e acrescentava: “Eles só conseguem entender bem se conseguirem criar a situação, quanto mais não seja num desenho, ver que realmente isto acontece.” (Entrevista inicial)

Apesar de achar a Combinatória um tema de difícil compreensão para os professores e os alunos, ela evidenciou algumas excepções no que concerne à sua aprendizagem por parte de alguns alunos mais “espertos e muito vividos”.

Os professores é que podem sentir mais dificuldades com esses alunos, porque tendo em conta as vivências deles, até os computadores que eles usam muito, o tipo de raciocínios que apresentam, dão-nos respostas correctas de maneiras de contagens que nós temos que pensar um bocadinho. Sabemos que está certo o resultado, mas, muitas vezes, o resultado está certo mas pode estar mal o raciocínio. E tento perceber se não existe nenhum problema no raciocínio. (Entrevista inicial)

Aquando da realização da entrevista final, Margarida, apesar de pensar que os alunos precisam de tempo para reflectirem individualmente, concluiu que o mais importante será o tempo que se usou no debate e confronto de ideias que se estabeleceu entre os alunos, quer em termos do pequeno grupo quer no grupo turma.

Fundamental foi a apresentação duma situação, de um problema em que eles reflectiram, até usaram esquemas ou diagrama em árvore, ou seja, em alguns momentos analisaram a situação. Foram apresentadas várias soluções para o problema, este tipo vai muito além daquilo que eu pensava. Portanto, eles precisavam de tempo... acho que precisam de tempo, mas na altura [na entrevista inicial] estava a pensar mais no tempo que cada um precisa para entender o problema. Mas agora acho que vamos um bocadinho mais além, que é o dialogar, aquilo que eu entendi, confrontar a minha opinião com a opinião dos meus colegas, analisar as resoluções, este tempo é que eu acho que é fundamental. (Entrevista final)

Porém, tratando-se de uma turma não homogénea, em termos de atitude dos seus alunos, Margarida estava atenta tanto aos alunos mais passivos, com participação diminuta, como aos mais participativos, aqueles que assumiram algum protagonismo, que argumentaram, pois com estiveram professora estão à vontade para o fazer, tiveram espaço na aula para procurarem e “fabricarem” os próprios saberes.

Alguns [alunos] gostam de ser passivos. Porque, muitas vezes, são passivos mas estão a acompanhar. Portanto, gostam de reflectir. Vão juntando as ideias que vão ouvindo e vão reflectindo, e à medida que vão ouvindo, vão esclarecendo as ideias que tinham e nunca transmitem a modificação do conhecimento que estão a ter. Enquanto outros são mais comunicativos. À medida que têm ideias e essas vão evoluindo, eles vão comunicando a sua evolução. O problema é quando são sempre os mesmos a fazer uma parte e outra, isso também se nota um bocado e é um bocado difícil mudar. Mas uns comunicam mais, outros menos. Dentro dos que comunicam mais, manifestam na maneira como comunicam se perceberam, se não perceberam, como é que estão, como pensam, se pensam bem, se pensam mal, etc. Os que não comunicam, depois consegue-se perceber nas realizações, na maneira como respondem a seguir, até no grupo, se realmente houve uma evolução de pensamento. Outros nem tanto. (Entrevista final)

Interesses e expectativas dos alunos. Depois de Margarida ter lido a transcrição da aula de Maria acerca do mesmo assunto que iria leccionar, concluiu que Maria fomentou o diálogo entre os alunos, tendo pensado: “o diálogo directo não vou fazer, porque eles também não estão habituados a fazer logo de início e não sabia exactamente se eles iam conseguir ou não” (Sessão 13).

Os alunos de Margarida estavam habituados a fazer uma exploração inicial, em qualquer assunto, partilhando ideias uns com os outros ou em pares, e só depois de terem reflectido de forma autónoma é que se abria o diálogo ao grupo turma. Foram estes os procedimentos que orientaram as aulas de Combinatória leccionadas por Margarida. Seguidamente, apresenta-se um pequeno extracto de um diálogo desenvolvido entre as participantes na sessão onde se reflectiu acerca das respostas apresentadas pelos alunos ao questionário implementado no final da leccionação do tema, e em que a Margarida referiu uma ideia muito pertinente e digna de ser sinalizada:

Margarida: (...) e começa a surgir uma ideia e outra e esta: ‘Sim, porque sei se o meu raciocínio está certo ou errado sem me ter dito apenas que está mal’. Isto diz muito. Pronto, vai mesmo... temos de repensar aquilo que andámos a fazer. Dentro do nosso discurso, mais não seja com este tempo todo...

Maria: Sim, mas mudar e ir de encontro aos interesses deles.

Margarida: Isso. Porque a motivação passa por aí, passa por aqui. E se eles o dizem, se o dizem tantas vezes, pessoas diferentes, com perspectivas diferentes... é porque realmente acaba por ser, temos que crer que seja verdade. (...) O que podemos concluir é que os alunos precisam que seja valorizada a sua aprendizagem, não no sentido de dizer como é, mas apenas de lhes permitir fazer. (Sessão 14)

Margarida mostrou ter um conhecimento profundo de como os seus alunos se relacionam, como se comportam, quais as suas capacidades, quais as suas dificuldades e a

forma como eles aprendem, respeitando tais posturas e preocupando-se com a preparação das tarefas a propor, como se confirma no excerto:

Quando nós temos uma tarefa nova, pensada em função dos alunos, nós damos muito mais de nós porque sabemos que aquilo funcionará melhor se estivermos mais atentos a tudo o que decorre. E, além disso, é uma tarefa pensada de acordo com as dificuldades, com aquilo que nós pensámos que os alunos precisavam para aprender determinada coisa. Portanto, não foi pensada como algo que alguém [fez] ... está mais ou menos adaptado à minha necessidade. Mais, eu reconheço uma necessidade, estrutura detalhadamente algum material para aplicar, para ir de encontro a essa necessidade dos alunos. (Entrevista final)

Mesmo assim, quando leccionou as “combinações” e “triângulo de Pascal”, verificou-se que Margarida, mesmo mobilizando todos os conhecimentos e recursos didácticos que possuía, não conseguiu persuadir os alunos nem envolvê-los de forma significativa nas situações não previstas que ocorreram.

Fazia parte da turma de Margarida um aluno, o Paulo, que se evidenciou pela sua postura, pela atitude descontraída que sempre apresentou, pelo seu raciocínio rápido e pelo empenho que colocou em todas as actividades e que foi motivo de muitas conversas havidas nas várias sessões. A informação seguinte, que Margarida facultou, mostrou que ela estava familiarizada com as vivências e problemas dos seus alunos:

Isso também tem a ver com a experiência de vida dele. Não tem mãe, não está com o pai, os outros irmãos foram adoptados e, portanto, eles para conseguirem comprar algumas coisas trabalham em animação de festas. Ou seja, eles estão muito habituados, nada lhes faz confusão, tem uma maturidade já muito grande. As dificuldades, o estar certo, estar errado, encara com muita normalidade. E isso é muito bom, e nota-se nas aulas. (Sessão 13)

Margarida mostrou-se orgulhosa e satisfeita com o desempenho deste aluno no teste intermédio: “O Paulo surpreendeu-me, apesar de continuar com a mesma postura. Teve positiva no teste intermédio e ele não estudou. Ele não estuda, mas tinha as ideias muito claras. Aliás, no teste intermédio, ele teve as questões ligadas com esta parte que nós vimos [a Combinatória] correctas, o que teve mal foi a probabilidade condicionada, que tinha sido dada antes e duma maneira mais tradicional. Portanto, safou-se bem.” (Entrevista final). Nomeou ainda alguns alunos que se destacaram pela sua participação nas aulas: “A Carina era uma aluna média e muito pouco participativa, mas conseguiu começar a exprimir as ideias. A Helena participou muito bem, ela estava mesmo entusiasmada e na parte final, na avaliação deste período, ela, à

semelhança de outros, referiu isso, o empenho que teve. Aliás, ela disse que teve oportunidade este ano de participar mais” (Entrevista final).

Conhecimento instrucional

Preparação das aulas. Margarida referiu que, na planificação das suas aulas, tinha em consideração o programa, vários livros e as características dos alunos.

São basicamente essas três. Utilizo sempre, dentro do possível, o manual porque gosto das actividades que propõe, tem actividades introdutórias e tem os exercícios finais. Levo os exercícios, com várias alíneas de exploração que eu selecciono, e passo no quadro. Se quero explorar um assunto, aquele exercício dá-me quase para uma aula, se for com a participação dos alunos. Portanto, utilizo muito isso. Muito à base de problemas. Eu dou muita importância aos problemas, acho muito importante perceberem os conceitos e aplicar pequenas rotinas, acho que é fundamental porque num problema, após a interpretação, ele depois tem a parte mais de rotina e de formação também. (Entrevista inicial)

Esta docente admitiu também que se sente limitada pelo tempo, reconhecendo que existem outras formas mais ricas de preparar a sua prática lectiva, nomeadamente tendo em conta as dificuldades apresentadas pelos alunos, que podem condicionar a sua aprendizagem: “Mas poderia fazer muito mais, pegar nas dificuldades [dos alunos], tentar perceber... porque a dificuldade num exercício dum aluno pode ser diferente da do outro” (Entrevista inicial). No entanto, este discurso foi contrariado pela sua prática lectiva, pois Margarida, em vários momentos, considerou os erros dos alunos e explorou-os para promover uma aprendizagem com compreensão.

Nesta investigação operacionalizou-se uma planificação pouco estruturada, desenvolvida nas diversas sessões. Para tal, ambas as docentes concretizaram um guião. Porém, a professora, no que se refere ao tipo de trabalho a desenvolver nas aulas, exteriorizou: “Eu acho que eles precisavam de resolver mais exercícios” para se sentirem mais seguros e confiantes.

Tanto eles como nós temos a ideia que é preciso fazer muito para ficar bem. E eles até podem realmente saber que conseguem e perceberam, mas se resolveram poucos sentem-se inseguros. Então se fizerem 30 ou 40 exercícios – ‘Se os realizar todos é porque sei’, se fizerem 3 ou 4, podem ser mais difíceis e pode estar lá tudo, mas como eles não sabem que está lá tudo acham pouca quantidade – ‘Isto deve estar muito incompleto’. Depois orientaram-se e eu também dei duas horas, pelo menos, de exercícios. E eles, na parte de Combinatória nos testes, estiveram bem, não foi por aí que falharam. Isto faz com que eles fiquem mais nervosos e às vezes falham porque se sentem pouco à vontade, e até pensam correctamente, mas.... ‘Mas será que é isto? Mas eu vi esta situação mas não cheguei a ver aquela, ou não vi muito bem’, e confundem, e têm medo de arriscar, ou arriscam mal. (Entrevista final)

A existência do exame nacional no final do ano e do primeiro teste intermédio, agendado para o dia 10 de Dezembro, condicionou a sua prática, impossibilitando-a de escolher estratégias inovadoras na leccionação dos outros temas, reconhecendo, assim, a influência deste tipo de avaliação na regulação da sua acção.

Gestão das aulas. Na entrevista inicial, no sentido de reduzir as aulas de tipo expositivo e desenvolver um ambiente na sala de aula favorável à aprendizagem dos seus alunos, tendo em conta as suas características, dado que eles têm necessidade de participar na construção do próprio conhecimento, Margarida afirmou que considerava uma aula adequada aquela em que o diálogo com os alunos se desenvolvia ao longo dos 90 minutos da aula.

Começo sempre por colocar perguntas ao longo, quase, de toda a aula. Não há nenhuma parte muito teórica, mesmo que eu comece a introduzir um assunto, tento, com questões, dar só uma pequena entrada e logo de seguida todo o conteúdo é exposto em diálogo. [O tipo de questões que coloco aos alunos] costumam ser questões abertas. De início abertas, e depois, à medida que eles vão dando as respostas e que eu consigo ver a relação que a resposta tem com aquilo que eu pretendo, começo a fazer outras perguntas. (Entrevista inicial)

Corroborando esta ideia, Margarida afirmou no início da investigação: “sabemos o objectivo, não conhecemos o percurso, temos que estar muito atentas a todas as deixas” (Sessão 13).

Na primeira entrevista, quando questionada sobre a melhor forma de leccionar a Combinatória, Margarida referiu que passaria pela resolução de muitos exercícios, estando de acordo com as suas concepções acerca do que é a Combinatória.

A melhor forma é utilizando exemplos e baseando, obviamente, na teoria. Levar à reflexão e também à visualização das situações. Talvez pela diminuição de casos. Por exemplo, vamos supor: eu quero fazer uma bandeira e tenho três cores disponíveis e vou fazer uma bandeira só com duas faixas (...). Se eu colocar a bandeira com três faixas e dez cores, a situação é muito mais complicada, dependendo se pode ou não repetir a cor, etc. ... No último ano que dei Combinatória não diversifiquei muito [as estratégias]. Uma das coisas que eu fazia, às vezes, era a utilização de diferentes raciocínios para a mesma situação. ‘Por que é que eu posso considerar uma contagem neste raciocínio, noutro raciocínio e acabo por chegar ao mesmo número?’

Nas sessões de planificação optámos por implementar tarefas mais abertas, no sentido de desafiar os alunos a verbalizarem os seus pensamentos e raciocínios, desenvolvendo-lhes também a competência de comunicação, pois pretendíamos usar as suas ideias como base para o desenvolvimento da aula. Naturalmente, cada professora concretizou a apropriação que fez

desta orientação e que foram, a nosso ver, diferentes. Margarida envolveu-se de tal maneira que, com muita convicção, considerou o seu papel preponderante na criação de situações desafiantes, provocando um maior envolvimento dos seus alunos, desenvolvendo-lhes uma maior autonomia e gosto pela descoberta.

Claramente, eu nunca tinha dado a Combinatória desta maneira, nunca me tinha surgido sequer... nunca tinha pensado que era possível dar desta maneira, nunca pensei que a Combinatória era tão rica em termos de investigação. Sempre olhei para a Combinatória mais ligada a fórmulas que aplicava e técnicas que identificava e perante duas ou três ideias que tinha dum exercício eu via qual era a que se adaptava melhor, algumas vezes até com alguma incerteza. Nunca na minha vida, em algum assunto, utilizei desta maneira tão rica ou durante tanto tempo sobre um dado tópico. (Entrevista final)

Margarida descreveu as aulas que ministrou, em Combinatória, proferindo o comentário seguinte:

Eu durante as aulas, preferia falar menos. Mas muitas vezes noto que tenho mesmo que falar mais, porque é mais rápido. [Na Combinatória] ouvi mais, acho que ouvi mais, porque eu tinha mesmo de ouvir para poder falar. Porque uma vez que era uma tarefa de investigação, ou eu ouvia ou então andávamos em sentidos opostos. Se calhar algumas vezes aconteceu isso, tinha que ouvir bem para poder dar o feedback e orientar." (Entrevista final)

Nas sessões, Margarida destacou, várias vezes, a importância da forma de questionar os alunos, sentindo necessidade de reflectir e partilhar com as colegas esta preocupação, no sentido de desenvolver esta sua competência.

Margarida captou várias informações das aulas que observou de Maria, através das notas registadas num pequeno caderno, que procurou cruzar com o que se discutia nas reuniões de planificação e de reflexão, e em casa procurava sustentação teórica, normalmente fornecida por Bárbara. Deste modo, tornava-se cada vez mais informada acerca do seu papel de professora, no sentido de procurar mobilizar as suas competências adquiridas, criando situações de ensino motivadoras e incitadoras do desenvolvimento de competências de ordem superior nos seus alunos. Acreditava nisso com convicção e passava-o para os seus alunos.

Em casa, imaginava os cenários, escrevia dicas sobre algumas intervenções que eu poderia ter, sabia aquilo que ia suscitar e ia aparecer no trabalho de grupo. Eu nunca conseguiria prever tudo, mas pensei sempre que era melhor ir com alguma coisa, mesmo sabendo que poderia haver algo de muito inesperado, do que com coisa nenhuma. E sabia que aquilo que eu levava preparado poderia ter de alterar, tomar um rumo diferente. Não podia era esquecer qual era a minha finalidade. Tinha que, no fundo, seguir um pouco aquilo que os alunos me iam dando, tentar

orientar para o que eu queria, mas sem que eles notassem que este... sem que houvesse ruptura no feedback que me estavam a dar, para que eu dissesse a qualquer momento: 'Afinal, agora o tempo está a passar e eu quero dar isto. Atenção! Acabou. Já não me interessa o que vocês pensam'. Portanto, não queria que isso acontecesse. (Entrevista final)

Por vezes, deparou-se com situações constrangedoras, dissuasoras desta postura. No entanto, os proveitos eram maiores e ela, à semelhança dos seus alunos, descobriu e aprendeu com a interação desenvolvida: "gostei porque nunca me tinha apercebido que era tão importante para eles nós valorizarmos os raciocínios, mesmo aquilo em que eles estavam errados" (Sessão 14).

Os professores têm de estar atentos às oportunidades que vão surgindo durante a aula e agarrá-las, têm de encontrar formas adequadas de intervenção, tendo sempre como referência o aluno, o seu papel, a sua postura e atitude, tornando a sua acção orientada no sentido de procurar responder às situações com que se deparam.

(...) surgiram alguns imprevistos e temos de ser muito rápidos, temos de pensar se vale a pena avançar, de que modo posso avançar e se devo... porque põe em causa a aprendizagem dos alunos. Se eu avançar, se eles acabam por ter uma aprendizagem significativa sobre aquilo que eu pretendo, então tudo bem. (...) Eu queria que os alunos, quando terminassem uma aula, retivessem alguma informação importante sobre aquilo que foi tratado, mas eles muitas vezes apresentam dificuldades ou fazem comentários inesperados, e eu tenho que depois, no fundo, trabalhar com três variáveis, que são: o tempo, as dificuldades inesperadas e o que eu preparei para aquela aula. Conciliar isto tudo é o mais difícil. (Entrevista final)

O seguinte diálogo, que decorreu na sessão 13, de reflexão sobre a prática, ilustra uma situação destas em que, no decorrer de uma aula, surgiu um episódio inesperado e Margarida, para não contrariar a tendência dos alunos e manter o normal decorrer da aula, teve de alterar a ordem dos assuntos previamente definida.

Margarida: E, portanto, nesta parte aqui eu acho que me meti nela, entre aspas, porque quis, eu podia ter...

Bárbara: Fugido dela.

Margarida: Fugia dela. Depois de me ter metido nela nunca imaginei que a aluna também me ia fazer aquela confusão toda. Ou seja, ela estava-me a dar ali uma interpretação completamente fora.

Maria: Eles não perceberam que o C significava 'com' e o S 'sem', por isso não utilizaram.

Margarida: Mas eles já estavam noutra onda. Passaram à frente a primeira parte. E nessa parte o que é que eu podia ter feito? Podia ter feito a ligação e depois ia para as letras e fazia a continuação. Como via o tempo a passar, disse assim: 'Bem, se

eu continuo aqui com esta discussão, vamos ficar aqui 90m'. A partir desse momento agarrei qualquer coisa favorável naquilo que eles estavam a dizer e disse: 'Bem, vou mandar isto para o grupo'. Alguns grupos discutiram e eu fui-me apercebendo que uns estavam a dizer as coisas certas, mas duma maneira insegura. Outros estavam mais ou menos, até houve um grupo que me disse: 'Oh professora, disse 2 minutos, só passou 1', ou seja, eles realmente precisavam de mais tempo para conseguir compreender bem a situação. (Sessão 13)

Margarida tinha a turma dividida em dois turnos num dos dias da semana. Assim, Margarida usou nos dois turnos as propostas que tinham saído do grupo de trabalho, referindo: "quando experienciámos pela segunda vez acaba por ser mais fácil, pois percepcionámos episódios que poderão ser ultrapassados de uma forma rápida e atacar com conhecimento de causa convenientemente".

Margarida: Eu apliquei a mesma actividade na hora anterior com o grupo do Paulo, do José... e eles concluíram as propriedades e tudo.

Maria: E utilizaram a notação ou não, Margarida?

Margarida: Usaram a notação...Não me consigo lembrar. Sei que, por exemplo, o grupo foi muito mais rápido. Entretanto ainda estive a fazer outras coisas, por isso...

Margarida: O que é que aconteceu? Por que é que eu mandei para o grupo? Eu percebi que eles têm dificuldades, mas aos bocadinhos, à medida que... Se eu encontrar situações, se os for interrogando agora nesta, agora naquela...

Maria: O errado...

Margarida: Exactamente. Eu também não preciso de dizer agora: 'Ora bem, vamos esclarecer isto tudo' e 'Vamos agora voltar ao início. Façam de conta que não aconteceu nada'. Não pode ser. Portanto, eles agora vão começando...

Maria: A aperfeiçoar, a limar.

Margarida: Exactamente. E foi isso que aconteceu. Daí em diante...

Maria: Eles chegaram a essa conclusão?

Margarida: Na parte das conclusões, das comparações, eu acho que eles se portaram muito bem.

Bárbara: Concluíram.

Margarida: O grande problema aqui é mesmo a interpretação e a relação da interpretação, ou seja, do problema com a fórmula. O que é que aquilo está a dar, efectivamente.

Bárbara: E depois, esta aqui, é que foi muito boa! Aquela menina que foi, tu aproveitaste muito bem.

Margarida: Depois a Helena... acho que foi a Helena... foi. (Sessão 13)

Dar uma boa aula consiste em adaptar, constantemente e de forma continuada, a planificação às respostas concretas dos alunos. Para tal, temos de reconhecer os sinais que os alunos fornecem ao longo da realização das tarefas, interpretando-os como informações sobre o significado por eles atribuídos a cada tarefa, sobre o correspondente grau de envolvimento intelectual e emocional. Por outro lado, as tarefas devem ter ligação com o que os alunos já

conhecem. O modo de condução deve constituir um progressivo desafio para os alunos. O professor deve interpretar o discurso e as acções dos alunos e auxiliá-los a tomar consciência das modificações que ocorrem ao longo dos seus processos de aprendizagem, dos elementos do seu conhecimento que se modificaram, aproximando-se ou afastando-se dos objectivos institucionais.

Bárbara: Tu aproveitaste muito bem a ideia da Isabel.

Margarida: Aproveitei porque a Isabel... exactamente. Fui-me apercebendo do que eles iam pondo no caderno e ela tinha isto, mas acho que não tinha este.

Bárbara: Não, este também não tinha.

Margarida: Mas, entretanto, na ida para o quadro aperfeiçoou. Mas eu obriguei-a, pedi-lhe para ela colocar aquilo que tinha. E ela lá acabou por dizer que tinha este e que não podia ser, e que não tinha este. E depois eu acho que não perguntei, não tenho a certeza, mas porque é que eu acho que ela se calhar colocou esta? Pela contagem. Então como faltava um, acrescentou um. E eu aproveitei isso para fazer, para eles reflectirem se este valor alguma vez poderia ser maior que o n .

Formas de trabalho dos alunos. Em anos anteriores, Margarida nunca tinha organizado os alunos, na sala de aula, em trabalho de grupo, aquando da leccionação da Combinatória.

Eu nunca tinha trabalhado a Combinatória em grupo, também até por uma questão de receio. Também já não dou o 12.º ano há algum tempo. Mas tratando-se de um assunto onde eu sei à partida que podiam surgir situações que eu podia não dominar, quer dizer, já sem as promover muitas vezes, ia um bocadinho insegura para a aula, quanto mais promovê-las! (Entrevista final)

Margarida evidenciou que, de facto, o trabalho desenvolvido em equipa, pelas três professoras, tornou-se uma mais-valia para ela pois,

neste trabalho tinha o apoio de vocês e reflecti bem sobre aquilo que ia fazer. Aquilo que nós pensámos, eu tentava, no material que me fornecias [textos de apoio], tentava perceber muito bem, e portanto estava à vontade, porque à partida sabia que dentro do meu conhecimento não podiam surgir muitas novidades. Nesse aspecto foi mais fácil. (Entrevista final)

Margarida era de opinião que as formas mais adequadas de organizar a turma dependia do tipo de tarefa a realizar, pois todas são importantes, em grupos de 4 ou 5 alunos, em pares ou individualmente. No entanto, na Combinatória manifestou preferência pelo trabalho de grupo na sala de aula, sendo o individual apontado como o mais apropriado para realizar em casa.

O trabalho em grupo permite que eles estejam a reflectir sobre várias ideias. Se tivermos elementos com ideias diferentes, 4 ou 5, portanto ficam logo 4 ou 5 ideias, enquanto em pares, se forem sempre os mesmos pares, e se houver uma

pessoa no par que seja um bocadinho mais protagonista em relação à outra, ou que consiga influenciar com mais facilidade a outra, portanto aquilo resulta sempre no mesmo, que é praticamente no trabalho de um. No trabalho de 4 já existe mais dificuldade em alguém impor uma ideia porque os outros que não concordam com essa ideia, se por acaso um fala e outro não fala, mas também não concorda, sente força para continuar o diálogo e dizer: 'Ah, eu também não concordo e tal...' Pronto, e cria-se ali mais diálogo, mais comunicação, mais reflexão, etc. (Entrevista final)

Relativamente ao trabalho individual, Margarida referiu que “podemos mandar para casa, para fazerem esse trabalho individual. Na sala, entre pequeno grupo e grande grupo, o confronto de ideias parece-me fundamental”.

Como se verificou ao longo da investigação, os alunos tinham uma propensão natural para se juntarem em grupo, mesmo que a professora não os informasse que a aula decorreria segundo essa disposição. “Os meus alunos, mesmo no 10.º e 11.º anos, faziam várias vezes trabalho em grupo, nunca fizeram foi trabalho em grupo tantas vezes seguidas [como aconteceu na Combinatória]”. Para além disso, eles sabiam perfeitamente como iniciar o trabalho sem necessidade de muitas instruções por parte da professora, pois mostravam familiaridade na gestão deste tipo de situações.

Eles reúnem-se, fazem trabalhos de grupo dentro da sala de aula e fazem trabalhos de grupo dentro e fora da sala de aula. Portanto, depende da tarefa. São eles que formam os grupos, mas eu passo muita informação (...). Utilizo muito a estratégia: dentro da sala de aula, se estão juntos, reúnem-se e fica um grupo, porque quero que eles todos sintam que todos têm valor, todos conseguem. Se o trabalho for fora da sala de aula, aí eu muitas vezes tenho em conta a localização geográfica, onde moram, e já lhes dou outra autonomia para formarem os grupos. (Entrevista inicial)

Avaliação. Relativamente ao aproveitamento desta turma, classificado pela docente como suficiente, ela admitiu a possibilidade de a avaliação que implementou, através de um teste escrito, ter sido desajustado em relação ao tipo de prática desenvolvida nas aulas.

Existe um fosso muito grande entre o que [os alunos] fazem nas aulas, como aliás vocês viram, e o que fazem no teste. Porque, apesar de serem alunos participativos e tenho alunos com capacidades, são alunos em que, a maior parte, também não têm apoio de fora [explicações]. Portanto, na aula envolvem-se, tentam perceber, esforçam-se, o que é bom. Se lhes der um desafio qualquer, mesmo outro tipo de trabalho, eles não perguntam: 'O que é que eu faço com esta folha? O que é que a professora quer?' Sentem que são capazes de fazer e pensar. (...) São autónomos e envolveram-se, só que no teste, eles também estão muito habituados a fazerem raciocínios em conjunto, e ali estão isolados, e ficam mais nervosos. E como trabalham em casa pouco, ou seja, também trabalham pouco duma maneira mais

isolada, no teste não se verificam os resultados. Eles empenham-se, não só nestas aulas mas em quase todas. Há sempre um ou outro [que não], claro. (Sessão 14)

A existência dos testes e de exames exige dos alunos conhecimentos e capacidades que entram em contradição com o que se advoga no programa, por exemplo em relação ao trabalho de grupo e à aprendizagem por descoberta. Quando o professor envereda por este tipo de abordagem nas suas aulas, com o objectivo de desenvolver competências de ordem superior nos seus alunos, verifica que estes não adquirem a prática que os prepara para os exames, o que se torna contraditório.

Esta professora revelou assim, sentir dificuldades na forma de avaliar os alunos, apresentando a gravação ou a transcrição das aulas como instrumentos eficazes nesse sentido, pois possibilitam a análise de comportamentos particulares e da evolução de determinadas competências no processo de aprendizagem dos alunos.

Dá também para rever algumas coisas que os alunos disseram, até importantes. Em termos de avaliar o conhecimento, realmente quando nós estamos a fazer a avaliação do aluno passado algum tempo, acho que fica muito pouco. Portanto, fica a participação deles, agora quando nós colocamos nos parâmetros: 'eu estou a avaliar o desenvolvimento, o raciocínio lógico do aluno', quer dizer, eu só depois quando li é que reflecti que algumas pessoas realmente estavam a ter um bom raciocínio. É interessante, porque se eu tiver isso presente, eu depois posso, a partir dali, mais tarde, comparar até o que ele disse na aula com as realizações que ele está a fazer relacionado com esse assunto, se evoluiu ou não. (Entrevista final)

4.3.4. Trabalho colaborativo

Margarida considerava o trabalho colaborativo como um meio eficaz na medida em que permite “partilhar, aprender, reflectir, pensar em algo que nunca imaginária, porque o colega me chama a atenção, etc.” (Entrevista inicial).

Esta docente, na primeira entrevista, destacou alguns constrangimentos que podem emergir no desenvolvimento deste tipo de trabalho, experienciados pela própria e talvez em jeito de alerta, para que não viessem a ocorrer situações do género.

As desvantagens é que muitas vezes eu tenho uma ideia que considero muito boa, que quero implementar, porque até já tive formação e os colegas não aceitam a minha ideia, não lhe dão importância. Fico um bocadinho frustrada, porque eu acho que gostava e que aquela era a melhor. Portanto, tenho que dar o braço a torcer. Ora, se isso acontecer muitas vezes pode haver uma altura em que eu [desanime]. Que não estou a dar aquilo que eu gostaria, mas aquilo que o grupo quer. Depois, depende das experiências dos elementos que estão no grupo, se todos puxarem muito para um lado, o outro até pode ter as melhores ideias, mas... As melhores

ideias, quer dizer, ideias diferentes e acaba também por não ser muito valorizado.
(Entrevista inicial)

Em relação ao trabalho desenvolvido no grupo de investigação, Margarida considerou que ele potenciou uma atitude mais crítica e uma reflexão mais apurada sobre a sua prática, sustentando que este tipo de trabalho lhe dá segurança e reforça a identidade do grupo.

Ao implementar uma tarefa, que sei que realmente vai atingir determinados objectivos e que devo mesmo aplicar, é mais fácil se trabalhar colaborativamente e, mesmo insegura, ajuda-me a ir mais além. E não podendo, receio que possa não estar a fazer a melhor opção, mas sigo o mesmo método que os meus colegas. Porque, afinal, ninguém me vai dizer que eu estou a fazer diferente porque eu estou a fazer igual aos outros. (Entrevista final)

Esta modalidade de trabalho, na concretização do currículo, apresentava-se como uma mais-valia, especificamente na Combinatória. Para além de ter contribuído para reforçar a visão favorável quanto a este tipo de trabalho, proporcionou-lhe a partilha de algumas dificuldades, nomeadamente sobre a implementação de tarefas diferentes numa tentativa de fugir à rotina.

Pessoalmente gostava... Senti-me bem ao fazer este trabalho, porque me senti mais segura, porque não estava a fazer esta escolha de tarefas sozinha. Então, senti que as outras pessoas que estavam a trabalhar comigo tinham a certeza que aquelas tarefas... estávamos a fazer alguma coisa de válido. (...)

Nunca pus em causa que estivesse a perder tempo. Portanto, as tarefas estavam bem escolhidas, estavam bem adaptadas. Noutros aspectos, eu quero escolher uma tarefa e, se eu não tenho uma parceria que me ajude a validar a aplicação daquilo, a pertinência da aplicação, eu sei que vou perder tempo. Acho que aquilo realmente vai atingir determinados objectivos e que devo mesmo aplicar, mas muitas vezes estou insegura e é mais fácil [utilizar outra estratégia]. (Entrevista final)

Especificamente na Combinatória, um tema considerado difícil para os professores, seria suposto, à partida, existir uma maior propensão entre os professores para que nas escolas se realizasse mais partilha de dificuldades, de estratégias de ensino, constituindo o trabalho colaborativo um contexto favorável para esta prática, o que é sugerido por Margarida:

No ensino da Combinatória, em particular, é muito importante o trabalho de grupo, porque os conteúdos requerem que as pessoas pensem, reflectam, e muitas vezes nós sozinhos conseguimos chegar a algumas soluções. Com outro(s) colega(s) acho que é mais fácil perceber as coisas. Podemos ficar, pelo menos, com mais certezas sobre aquilo que estamos a fazer, porque nós fazemos alguma coisa na aula e explicamos aos nossos alunos, nós achamos que estamos a explicar bem, mas não temos a total certeza de que aquela estratégia resulta. Às vezes, é mais para nos safarmos desta maneira ou daquela, e o trabalho em grupo neste tema acho que é

fundamental. Não só para nós, mas para todos os professores, uma vez que eu ouço falar que existem tantas dificuldades. (Entrevista final)

No trabalho que desenvolvemos ao longo dos três meses, iniciado com a planificação anual e a médio prazo do tema e seguido da análise de respostas dadas pelos alunos a questões do teste de Correia (2008), surgiram constantemente propostas apresentadas pelas participantes e pela investigadora, no sentido de elaborarmos a planificação a curto prazo, que analisámos, debatemos e modificámos. Talvez por este trabalho se ter iniciado com bastante antecedência, Margarida não se sentiu muito envolvida na realização destas tarefas de planificação, mas foi necessário percorrer este percurso, o qual também contribuiu para o estabelecimento de boas relações humanas entre as participantes.

Nas primeiras sessões foi mais estruturar o trabalho. Nessas sessões, que estavam mais distantes, nós acabávamos por estar a trabalhar a longo prazo. Para mim, eu sentia-me ainda muito longe da situação. Portanto, não me sentia tão... não é motivada, não é o caso, é... com tanta vontade de exprimir aquilo que sentia. Parecia que estava muito longe, não estava a sentir aquilo. Mas depois, com o tempo, acho que começámos todos a ganhar mais confiança uns nos outros, e uma das coisas que eu sempre tentei passar no trabalho de grupo é que o objectivo era reflectir e ver exactamente o que estávamos a fazer, porque é que estávamos a fazer. Não propriamente para vermos se *a* ou *b* estava a fazer melhor, ou se estava a estratégia a resultar, não era nesses termos, era mais o trabalho em si. (Entrevista final)

Verificou-se ao longo do tempo uma interdependência crescente entre as participantes (Little, 1990), visível nas discussões travadas durante as sessões, ao definirem objectivos mais claros quanto ao trabalho comum, ao mesmo tempo que foi mais exigente e prolongada no tempo.

E conseguimos. Portanto, nas últimas sessões notou-se claramente que estávamos já muito mais abertas, já estávamos mais à vontade a falar sobre as coisas, já não estava em causa se eu dissesse alguma coisa sobre a Maria ou a Maria dissesse alguma coisa sobre aquilo que eu estava a fazer. Para mim era completamente indiferente, porque eu estava ali exactamente para aprender. O meu objectivo era desenvolver e aprender, não era propriamente estar ali só a assistir, gostava que também me ajudassem a reflectir. No início éramos pessoas praticamente desconhecidas, eu não conhecia [como profissional] a Maria. É preciso tempo para que as pessoas se apercebam que os outros estão, entre aspas, de boa fé para trabalhar. (Entrevista final)

Este trabalho conjunto foi muito gratificante para Margarida, pois durante o seu decurso sentiu-se apoiada pelo grupo e menos isolada para enfrentar as dificuldades que emergiram no decorrer da sua acção, referindo: “É muito bom trabalhar com um grupo. É muito bom ter o à

vontade para poder expor, ajudar, definir e analisar as estratégias, sempre numa perspectiva de construção, de saber, etc.”

A relação de maior proximidade que se foi desenvolvendo, instigada também pela assistência às aulas das participantes, contribuiu, segundo Margarida, para o aprofundamento do seu conhecimento acerca do tema de Combinatória, bem como das várias perspectivas e dificuldades apresentadas pelos alunos nas tarefas implementadas, vislumbrando situações que poderiam ocorrer na sua prática.

O facto de ter assistido à aula da Maria, ver o modo como ela fala com os alunos, também trouxe aspectos positivos na maneira como ela diz, na abordagem que faz. Eu pensava: ‘Acho interessante, ela realmente explicou bem este assunto, pensando bem até pegou bem na questão’. Pronto, isso ajuda-me. E, por outro lado, a Maria foi a primeira [a leccionar] muitos assuntos. Isto ajuda também a ver a recepção dos alunos àquilo que é implementado. Quando eu dou as aulas, posso prever. Quando analiso o que aconteceu com a Maria, eu vejo que os meus alunos podem ser, em certa medida, comparados aos alunos dela e consigo perceber o feedback que eles estão a dar à Maria perante aquilo que ela está a dizer. Assim, posso mudar o meu discurso, tendo em conta algumas coisas que acho que poderia abordar de maneira diferente, também tendo em conta a minha realidade, mas já fazendo previsões mais claras sobre a mesma tarefa.

Margarida abordou diversos aspectos que considerou pertinentes na reconstrução dos próprios saberes sobre a sua prática, nomeadamente, valorizando a reflexão após a acção e o papel que as colegas, com quem trabalhou de forma colaborativa e que assistiram às suas aulas, desempenharam no enriquecimento e aprofundamento dessa reflexão. Isso permitiu-lhe perceber e melhorar vários aspectos da sua acção, proporcionando-lhe outras formas de condução das tarefas que implementou nas aulas, abrindo-lhe perspectivas de abordagem mais ricas. Podemos afirmar, com convicção, que o trabalho desenvolvido pelas três docentes trouxe benefícios individuais, designadamente através da análise de episódios ocorridos nas várias aulas assistidas. É urgente que o professor saiba aproveitar todas as situações que emergem na sua vida profissional no sentido de crescer cada vez mais.

Nas sessões, eu acho que houve uma evolução no diálogo (...). Dos episódios todos, o que eu mais gostei... gostei muito que ela [Maria] tivesse analisado a minha aula, que me tivesse dito alguns momentos que eu poderia ter feito diferente. Infelizmente, eu no fim da aula analisei e referi alguns aspectos. Mas, passado uma semana, nós já não nos lembramos e aquilo que vocês disseram que eu poderia ter feito realmente, se calhar, teria funcionado muito melhor do que aquilo que eu fiz. Serve para que eu fique mais atenta às minhas intervenções na aula, para que realmente tenha bem definido, consiga compreender ainda melhor a mensagem que os alunos me estão a dar. Muitas vezes, eles estão a dar-me uma

mensagem mas eu já estou a estruturar algo para lhes dizer, e quando a mensagem vem, já não vem a tempo de mudar aquilo que eu tenho intenção de lhes dizer, e, portanto, as coisas começam a não bater muito certo. Eu gostei muito que tivessem tido essas intervenções. Foi das partes que eu gostei mais, foi que vocês tivessem dito o que é que eu podia mudar.

CAPÍTULO 5

CONCLUSÕES

Na primeira secção deste capítulo é feita uma síntese dos principais aspectos do estudo, sendo depois, na segunda, apresentadas as principais conclusões do estudo organizadas através das questões de investigação estabelecidas e tendo em conta todo o enquadramento teórico que sustenta este trabalho. Na terceira secção são feitas algumas recomendações consideradas relevantes para futuras investigações.

5.1. Síntese do estudo

Em termos de desenho de investigação, usámos uma metodologia de estudo de caso, (Bogdan & Biklen, 1994), aplicado às duas professoras que participaram no estudo.

Ao investigar em que medida um projecto de investigação-acção, realizado por duas professoras e pela investigadora, pode contribuir para o desenvolvimento do conhecimento didáctico, não se pretendeu generalizar os resultados obtidos, mas apenas analisar e compreender, num contexto particular, o alcance de uma certa prática. Neste âmbito, foram estabelecidas as duas seguintes questões de investigação:

1. O trabalho colaborativo é facilitador da promoção de uma atitude reflexiva e investigativa dos professores, face às dificuldades apresentadas pelos alunos em Combinatória?
2. De que forma o trabalho colaborativo se reflecte no desenvolvimento do conhecimento didáctico dos professores em Combinatória?

Todo o trabalho desenvolvido não foi de carácter obrigatório, decorreu num local e durante o tempo que a equipa aceitou como justificável, característico de uma verdadeira *colegialidade* (Hargreaves, 1998). A recolha de dados decorreu ao longo da realização do estudo, durante os meses de Setembro, Outubro, Novembro e Dezembro, do ano de 2008. Os métodos de recolha de dados utilizados nesta investigação foram a observação, a entrevistas, o questionário ministrados aos alunos no final da leccionação do tema, as notas de campo e as conversas informais.

A análise de dados foi realizada de forma contínua durante o processo de recolha dos dados, organizando e interpretando os factos, numa perspectiva de regulação e aferição das

questões de investigação (Bogdan & Biklen, 1994) e após a conclusão da recolha dos mesmos. Nesta última fase foram construídos e estruturados os dois casos, estudados a partir das categorias de análise no que concerne ao desenvolvimento do conhecimento didáctico das participantes.

Perante o objectivo de melhorar o ensino e de promover o crescimento profissional, através da criação de um bom clima de trabalho e de aceitação mútua, onde imperasse o respeito, a abertura de espírito, a responsabilidade, a confiança, a motivação e a auto-estima, pretendeu-se criar um grupo de trabalho coeso e unido, que favorecesse a partilha de saberes e experiências adquiridas, o que foi facilitado pelo facto de existir uma relação de proximidade entre as professoras. Apesar de o grupo de trabalho ser constituído por três elementos – duas professoras e a investigadora – com idades próximas, pode ser considerado um grupo de pessoas que apresentam competências diversificadas, o que se tornou uma mais-valia porque instigou uma dinâmica de trabalho enriquecedora.

A relação destas professoras com a Combinatória, enquanto alunas, desenvolveu nelas sentimentos de insegurança e de falta de vontade, que foram desaparecendo ao longo dos anos de experiência docente, com a prática e a reflexão sobre essa prática.

Estas professoras tinham uma visão um pouco limitada sobre a Combinatória, sendo considerada por elas como um conjunto de técnicas de contagem, e encaravam o seu ensino como sendo muito difícil. Ambas sustentavam que leccionavam este tema propondo a resolução de exercícios, acompanhados da visualização da situação concreta. Não transmitiam os conceitos, mas, através de um diálogo orientado que mantinham com os alunos, onde prevaleciam questões de *confirmação* e *focalização* (Ponte & Serrazina, 2000) levavam-nos à descoberta do que pretendiam, como ainda foi prática de Maria. Margarida considerava importante a apresentação de vários processos de resolução dos exercícios.

Margarida, apesar de assumir que possuía um conhecimento pouco profundo da Combinatória, desenvolveu um grande investimento em casa na preparação das suas aulas, partindo do guião elaborado nas sessões de planificação e de todo o material fornecido pela investigadora, nomeadamente da leitura de textos alusivos ao tema, tentando promover nos alunos uma boa relação com o conteúdo, aspecto que considerou fundamental. Esta professora teve consciência, logo à partida, que é essencial ter vontade e audácia para concretizar tarefas inovadoras e, para isso, teria que demonstrar uma atitude investigativa no sentido de explorar as tarefas antes de as propor aos seus alunos.

Os problemas de Combinatória que as professoras implementaram nas suas aulas, integrados nas tarefas introdutórias, incentivaram os alunos a explorar processos combinatórios antes do ensino formal dos conceitos (Batanero *et al.*, 1994; English, 2005; Godinho *et al.*, 1997), através do teste (Correia, 2008) implementado no primeiro dia de aulas. Achámos por bem que a introdução deste tema, considerado de difícil leccionação pelas participantes e pela investigadora, fosse precedido de uma detalhada investigação, levada a cabo pelas professoras, acerca dos conhecimentos que os alunos possuíam sobre o mesmo, pois, segundo Batanero *et al.* (1994), “é preciso estudar o terreno sobre o qual se vai construir um edifício” (p. 71).

A investigação levada a cabo proporcionou oportunidades para que fossem as próprias professoras, nas sessões de planificação, a seleccionar e adaptar as tarefas a trabalhar e explorar nas suas aulas, para que, deste modo, as sentissem como suas e as estimulassem a experimentar. À planificação das aulas seguiu-se a respectiva concretização, que dependeu da apropriação feita por cada professora, de acordo com as suas características pessoais, instigando-lhes uma dinâmica diferente, o que, de certa forma, tornou rico este trabalho.

Embora as características das duas professoras fossem diferentes, ambas nutriam uma enorme preocupação pelos seus alunos e pela melhoria do seu processo de ensino, no sentido de tornar significativas as aprendizagens dos alunos. Através da implementação das tarefas que planificámos, que conduziram ao desenvolvimento de competências de ordem superior, Maria, nomeadamente, acreditou com convicção que os seus alunos desenvolveram o seu poder de abstracção e adquiriram uma certa maturidade.

Eu acho que aquilo tudo que eu exigi de competências de abstracção, efectivamente, eles adquiriram, eles chegaram à abstracção, decerto, que era a necessária neste patamar. Porque foram crescendo, porque as actividades foram exigindo deles cada vez mais, eles sentiram essa necessidade. Mas porque também trabalharam. (Entrevista final)

Margarida percebeu, desde início, as potencialidades de um trabalho desenvolvido nestes moldes, terminou satisfeita e mais motivada e confiante, reforçando a sua convicção de que é necessário, para melhorar o processo de ensino-aprendizagem, continuar a implementar tarefas deste género nos próximos anos e em contextos diferentes, nomeadamente em níveis de ensino mais baixo, no que concerne ao tema de “Combinatória”. Considerou, portanto, a experimentação das novas metodologias nas suas aulas como incitadoras da sua aprendizagem.

Ambas as professoras admitiram que esta experiência serviu para questionar todo o ensino da Combinatória que ministraram até então, e até o ensino de outros temas,

incentivando-as a experimentar novas metodologias, a mudar a sua prática, nomeadamente valorizando processos desencadeados pelos alunos, de forma autónoma e espontânea, em interacção com os colegas do grupo. Tentaram, desta forma, abandonar o modelo tradicional de ensino, que se baseia na transmissão de conhecimentos e valoriza procedimentos rotineiros, a resolução de muitos exercícios do manual e a memorização, desempenhando o aluno um papel passivo. As professoras tomaram consciência que a experimentação de novas metodologias, para além dos constrangimentos sentidos, envolveu os alunos em actividades significativas, promotoras de uma aprendizagem com compreensão.

Maria, a mais obstinada e defensora da orientação dos seus alunos – segundo ela, “eles têm necessidade de uma âncora”, tomou consciência, depois de assistir às aulas de Margarida, que orientava muito os seus alunos, dando-lhes pouca autonomia na construção da própria aprendizagem. Assumiu que ela exercia um papel muito activo e, para implementar este tipo de actividades deveria adoptar um papel mais de ouvinte e observadora, o que não foi notório neste trabalho. Maria necessita mudar a sua postura, criar hábitos de promover a sua própria aprendizagem através da investigação levada a cabo nas suas aulas, para que, deste modo, imprima a mesma dinâmica nos seus alunos, possibilitando-lhes um papel activo na sua aprendizagem.

Ambas as professoras valorizaram as discussões e o trabalho realizado em conjunto, pois as sessões realizavam-se no final da manhã de trabalho; finalizavam as actividades escolares pelas 13h:20m e Maria tinha que se deslocar da sua escola para a escola da Margarida, onde as sessões se realizavam por volta das 13.30 horas, não almoçando. As duas participantes nunca desanimaram ou pensaram desistir da realização deste trabalho.

Ambas as participantes assumiram que o desenvolvimento do seu conhecimento didáctico se processa ao longo da sua vida profissional, sendo impulsionadores de tal aprendizagem trabalhos realizados segundo a dinâmica deste projecto. Consideraram o trabalho colaborativo um meio potenciador de aprendizagens colectivas e individuais, pois possibilitou a reflexão conjunta, a observação de aulas entre as participantes e posterior reflexão e discussão, fomentando a regulação da acção e contribuindo, deste modo, para modificar, se necessário, as suas práticas (Fullan & Hargreaves, 2001)

5.2. Conclusões

Nesta secção, apresentamos e discutimos os principais resultados obtidos no estudo, tendo por referência as questões de investigação nele estabelecidas. Todavia, antes de propriamente respondermos às questões de investigação, vamos referir-nos aos principais aspectos do trabalho conjunto desenvolvido pelo grupo.

O trabalho colaborativo realizado compreendeu, fundamentalmente, actividades de planificação da actividade docente e de reflexão sobre a prática implementada em sala de aula. Nas actividades de planificação, desenvolveu-se a planificação das actividades do grupo e a planificação do tema e das aulas a leccionar. A planificação de cada aula traduziu-se na elaboração de um guião, que constituiu uma plataforma comum de trabalho, permitindo uma margem de liberdade considerável para que cada participante o adequasse às suas características pessoais e às necessidades dos seus alunos. As actividades de reflexão ocorreram ao longo das sessões de trabalho realizadas no âmbito do estudo, tendo assumido um carácter mais profundo e sistemático no caso das aulas assistidas. Durante todas as sessões, tanto de planificação da acção como de reflexão sobre a acção, procurámos seleccionar, analisar, interpretar, organizar, discutir e reflectir sobre as diversas formas de abordar a Combinatória.

O momento em que foi planificada a leccionação do conteúdo, bem como a sua implementação, coincidiu com o arranque do ano lectivo. Como aconteceu em todas as instituições educativas, as professoras estavam a viver um processo de mudança organizacional e profissional, nomeadamente a implementação do novo modelo de avaliação e o novo modelo de gestão. Estas mudanças, geradoras de situações de conflito e de incerteza, constituíram algum constrangimento para o desenvolvimento deste trabalho, visto que as professoras estavam envolvidas em novas dinâmicas, disponibilizando menos tempo para os trabalhos inerentes a este projecto. No sentido de dar respostas a esta problemática, as professoras procuraram conciliar todo o tipo de tarefas, pois são pessoas para não desistir quando se comprometem.

O teor das reuniões de trabalho evoluiu com o tempo, gerando-se um clima de empatia entre as participantes. Inicialmente centrámo-nos na planificação das aulas e na análise das respostas dos alunos ao teste; neste último caso, procurando compreender os pensamentos dos alunos. Posteriormente, na prática lectiva, os alunos foram confrontados com as várias

resoluções, examinando e debatendo as estratégias usadas por eles na resolução dos problemas. Nas reuniões de reflexão entre docentes, analisou-se e reflectiu-se sobre a acção, sempre no sentido de adequar as práticas lectivas ao sucesso escolar dos alunos.

Ao longo do projecto foi-se criando, nas participantes, um sentido de pertença ao projecto, perceptível na forma de interacção entre as três, na confiança e no à-vontade que progressivamente mostravam em expor as dificuldades da prática e de outros problemas com o objectivo de os partilhar. Deste modo, proporcionaram-se momentos de reflexão conjunta e de desenvolvimento de um diálogo que veiculava um sentimento de apoio na resolução de dificuldades sentidas. Este contexto de trabalho, a nosso ver, contribuiu para uma aprendizagem mútua. Intuímos, também, que a observação de aulas das professoras desencadeasse novas formas de concretizar o mesmo guião de aula, como consequência da nova compreensão das situações vividas na observação da aula.

O trabalho colaborativo desenvolvido evoluiu da forma de *partilha* para o *trabalho em co-propriedade* (Lima, 2002; Little, 1990), funcionando como apoio à necessidade que as participantes manifestaram em problematizar e questionar a sua acção através da *investigação na acção* (Alarcão, 1996; Caetano, 2004; Day, 2001; Ponte, 1994) e, consequentemente, conduzindo a reflexão para um nível mais profundo e geral, a *reflexão sobre a reflexão na acção* (Schön, 1987, 1992). Nesta colaboração em *co-propriedade* encontraram-se respostas para colmatar problemas e dificuldades surgidos na sala de aula, a par de uma mudança de estratégias experienciadas nas suas práticas lectivas.

O apoio do grupo de trabalho é imprescindível para superar dificuldades sentidas na prática (Boavida & Ponte, 2002), no que concerne, sobretudo, à implementação de estratégias inovadoras, pois, como referiu Margarida, não se sente sozinha nem será apontada pela comunidade como sendo a única a experimentar novas metodologias.

As sessões de trabalho em grupo foram essenciais, funcionámos como uma equipa de reflexão, em que as professoras foram capazes de discutir momentos de aulas observados pelas colegas que a elas tinham assistido. Mas, levou algum tempo até que estas discussões se fizessem de uma forma aberta. A reflexão sobre a acção aconteceu quando as professoras conversaram sobre o que tinha acontecido na sala de aula, logo após a aula, nas sessões de trabalho específicas de reflexão e de forma informal. À medida que todo o processo de reflexão se ia desenvolvendo, as professoras sentiam-se mais confiantes e mais motivadas para concretizarem o que aperfeiçoávamos nas sessões de planificação e reflexão. Sobretudo, a

reflexão parece ter tido força suficiente para provocar e desencadear a acção (Serrazina, 1999), no sentido que uma maior atenção foi dada à organização das actividades na aula, provocando uma maior preocupação acerca dos aspectos do conteúdo e pedagógicos.

Para criar tarefas mais motivantes, o professor tem de possuir um conhecimento profundo do conteúdo, relacionar os conceitos matemáticos de modo a não passar para os seus alunos uma visão compartimentada da Matemática e ter, essencialmente, uma postura e atitude abertas para experienciar novas tarefas (Boavida & Ponte, 2002; Fullan & Hargreaves, 2001; Hargreaves, 1998; Serrazina, 1999; Shulman, 1993).

Maria e Margarida trabalharam e trabalham colaborativamente com outros professores da sua escola, e, mais especificamente, com colegas que leccionam a mesma disciplina e o mesmo ano escolar, praticando uma *cultura de balcanização* (Fullan & Hargreaves, 2001; Hargreaves, 1998; Little, 1993; Santos, 2000) de forma voluntária. Assim, estabeleceu-se uma cumplicidade entre elas que se tornou vantajosa e se repercutiu num bom aproveitamento dos alunos da escola a nível interno e externo. Fullan e Hargreaves (2001) classificam esta prática como *circunscrita*, pois os professores não partilham a observação da prática lectiva, desenvolvendo desta forma uma *colaboração confortável*.

Segundo Fullan e Hargreaves (2001) e Hargreaves (1988), a eficácia do trabalho colaborativo passa pela observação de aulas. Neste projecto, as professoras partilharam a observação de aulas, tendo verificado ser uma das estratégias de desenvolvimento profissional mais poderosas que se experienciou nesta investigação, facilitando a identificação e tomada de consciência de limitações antes não percebidas pelas participantes, constituindo-se, deste modo, como uma forma de impulsionar a aprendizagem.

A partilha de experiências e saberes que se praticou durante o trabalho desenvolvido em conjunto extravasou os muros de cada escola (Fullan & Hargreaves, 2001), pois as professoras pertenciam a escolas diferentes, de distritos diferentes.

Esta equipa de trabalho vivenciou uma situação de dificuldade, logo após o decorrer da primeira aula assistida de Maria, e que classificáramos como uma situação decorrente da *desigualdade entre os custos e os benefícios* (Boavida & Ponte, 2002). Então, uma das estratégias apresentadas para colmatar esta dificuldade foi alterar a sequência da planificação e implementar horas extra para que os alunos consolidassem os seus conhecimentos, estratégia também adoptada por Margarida.

Maria revelou-se sempre uma pessoa muito confiante no que sabia e fazia, desvalorizando, por vezes, as potencialidades do trabalho colaborativo, que se desenvolveu no sentido de potenciar a mudança, sobretudo, de atitude e de suporte para melhorar a sua prática lectiva a partir da troca de ideias e experiências.

Margarida revelou outra postura perante o projecto, nomeadamente, acreditando na concretização das estratégias delineadas nas sessões de planificação e mostrando muita vontade em experimentá-las, o que conseguiu com sucesso, apesar de ter que gerir algumas dificuldades. Margarida tomou consciência de que tinha de estudar e preparar muito bem as lições, para que, desta forma, pudesse orientar com sucesso as aulas que estávamos a planificar em conjunto. Para tal, imaginava em casa episódios que poderiam acontecer durante a sua acção docente, treinando mesmo o tipo de questões a colocar aos alunos. Considerou este trabalho essencial para evitar cair na rotina que frequentemente se verifica no trabalho dos professores com o decorrer do tempo.

Porém, as expectativas criadas por estas docentes no início da investigação foram alcançadas, considerando que este trabalho colaborativo culminou na satisfação manifestada por parte das participantes, tanto em termos de um maior aprofundamento do seu conhecimento didáctico como na contribuição para uma melhoria da sua prática no âmbito da Combinatória, acrescentando, ainda, que trabalhos do género deveriam ser desenvolvidos também noutros conteúdos e nos mesmos moldes de trabalho colaborativo.

5.2.1. O trabalho colaborativo é facilitador da promoção de uma atitude reflexiva e investigativa dos professores, face às dificuldades apresentadas pelos alunos em Combinatória?

Perante dificuldades que surgiram na sala de aula, nomeadamente episódios espontâneos desencadeados pelos alunos, que envolveram os professores em situações pouco seguras, duvidosas, caracterizadas pela incerteza, Margarida não gostava de contrariar a orientação que os alunos estavam a dar ao desenrolar dos acontecimentos. Valorizando uma aprendizagem significativa, identificando-a como objectivo último, esta professora abandonava durante algum tempo a planificação da aula. Por exemplo, na sessão 12 debatemos durante bastante tempo o número de alunos que, de facto, se envolveram neste tipo de aprendizagem e Margarida, mais uma vez, destacou uma situação ocorrida numa aula, em jeito de aprovação, em que uma aluna

tinha pedido para se ausentar mais cedo e, pelo facto de estar tão envolvida na actividade que se estava a desenvolver no seu grupo de trabalho, ficou até ao final, esquecendo-se de sair.

Ao longo do seu desenvolvimento empírico, esta investigação testemunhou várias situações imprevisíveis, nomeadamente dúvidas que apareciam sobre tarefas a implementar, apresentação de várias resoluções de problemas, reflexão sobre aulas onde ocorriam desvios em relação à planificação efectuada e dificuldades de gestão do tempo da aula. Uma vez identificados, ocupávamos o tempo previsto da reunião na tentativa de encontrar soluções ou alternativas para superar estes problemas. Enfrentaram-se também problemas logísticos, nomeadamente a falta de pilhas para o gravador, a falta de sala, entre outros. Estes momentos condicionaram também a realização prevista e alteraram a ordem de trabalhos previamente definida, ficando pontos por tratar e adiados para a próxima reunião a realizar na semana seguinte. Foram também motivo de reflexão os atrasos na leccionação do conteúdo verificados na escola de Margarida, já que Maria cumpriu à risca a calendarização.

Durante a leccionação da primeira aula assistida por Margarida e Bárbara, Maria não conseguiu cumprir o plano de aula que tinha estabelecido, pois emergiram dificuldades que a professora não tinha previsto, nomeadamente no que concerne à interpretação feita pelos alunos do problema 3 da ficha de trabalho 2. Maria, sentindo-se pressionada pelo tempo e pelos colegas da sua escola, alterou a planificação por nós elaborada, invertendo a ordem de leccionação dos conteúdos, nomeadamente leccionando o “cálculo de probabilidades” antes do “triângulo de Pascal”, seguido pelo “binómio de Newton”. Este foi, também, outro imprevisto que condicionou o normal desenvolvimento das sessões. Os constrangimentos surgidos, nomeadamente acerca da gestão do tempo e do cumprimento da planificação, que Maria não vislumbrou antes da acção e que lhe provocaram mal-estar, levaram-na a agendar horas extra no sentido de proporcionar aos seus alunos momentos de consolidação de conhecimentos.

A grande preocupação de Maria em cumprir o programa, em estar em consonância com os colegas da sua escola, em preparar os seus alunos para os testes intermédios e o exame nacional condicionavam o seu comportamento, orientando a sua actuação pedagógica na sala de aula e limitando as possibilidades de aplicação de tarefas inovadoras, o que se traduziu, por vezes, na desvalorização das propostas e iniciativas apresentadas nas sessões de trabalho.

Margarida, com o consentimento manifestado por todas, fez chegar informação sobre tarefas que elaborámos aos colegas do grupo da sua escola, mostrando, desta forma, o seu envolvimento e gosto de trabalhar colaborativamente sobre um assunto acerca do qual sentia

dificuldades. Esta professora considerou o desenvolvimento deste trabalho conjunto como uma oportunidade para aprofundar os seus saberes sobre Combinatória e sobre o seu processo de ensino e aprendizagem, superando as suas expectativas iniciais. Foi, sobretudo, na *acção*, onde pôs em prática o trabalho antes realizado, e na *reflexão sobre a acção* que, de facto, esta professora desenvolveu o seu empenho e a sua aprendizagem. Aprendeu com os seus alunos quando valorizou, considerou e respeitou, no desenvolvimento das suas aulas, as suas estratégias. Nas tarefas introdutórias, as estratégias espontâneas que os alunos apresentaram antes da instrução, na resolução de problemas quando adoptaram os seus próprios caminhos, valorizando o processo de verbalização dos raciocínios subjacentes a respostas curtas dos alunos, como imprescindível para a elaboração de uma avaliação justa, a utilização de produções escritas – composições – como é preconizado pelas orientações curriculares actuais e as competências de ordem superior nomeadamente a comunicação. Margarida mostrou confiar nos seus alunos, desafiando-os a por eles próprios ultrapassarem as dificuldades com que se deparavam. Ora, esta atitude foi transferida para os alunos, possibilitando-lhes desenvolver outra capacidade, muito importante, que é a autonomia na construção do próprio conhecimento.

O que mais surpreendeu Margarida foi o facto da motivação dos alunos para a Combinatória passar precisamente pela valorização que a professora fez do seu esforço e das suas ideias, quer estivessem correctas ou erradas. No caso das respostas erradas, a discussão em grupo foi uma estratégia valorizada pela professora para se chegar às respostas correctas. Margarida valorizou os erros dos seus alunos em vários momentos das aulas, entendendo-o como um processo de construção do próprio conhecimento. Margarida acreditou que é através do confronto de diferentes argumentos que os alunos abandonam as ideias erradas ou as modificam no sentido de fazerem uma aprendizagem com compreensão (English, 2005; Maher & Martinho, 1996). Em sua opinião tem que se explorar o erro para que o aluno o supere. Por exemplo, na terceira aula de Margarida, assistida por Maria e Bárbara, aula sobre “combinações”, a identificação do *erro de ordem* (Batanero *et al.*, 1997a, 1997b), que consiste em os alunos considerarem a ordem dos elementos quando esta é irrelevante, constituiu-se no ponto de partida que deflagrou na mudança de percurso da aula antevista pela professora, provocando assim uma abordagem do assunto, mais sinuosa do que o previsto. Margarida saiu incomodada desta aula, pois tinha sido muito confusa, levando muitas ideias para pensar em casa e investigar de forma mais consistente e com muita vontade de experimentar outra maneira

de leccionar este conceito, como o fez na aula seguinte e na outra turma que tinha. Margarida, de forma natural, partilhou estas situações com a equipa durante a sessão. Na reflexão profunda, em que foram analisados os cinco episódios, surgiram explicações, discussões e confrontos de ideias, bem como alternativas de intervenção. Constituiu, sem dúvida, um momento rico de aprendizagem que as participantes vivenciaram a partir da prática lectiva. Todas reconheceram, na situação vivida, as dificuldades surgidas e imprevistas e perspectivaram a sua resolução à custa da teoria e da ajuda dos colegas da equipa de trabalho.

É de salientar que o tipo de abordagem discutida no conteúdo Combinações, destacando que $\left[C_2^5 = C_3^5 \right]$, e que estava presente no teste, não foi seguida por Maria. Esta professora fê-lo à custa do “jogo” de fórmulas e manipulações algébricas, enquanto Margarida contextualizou o problema, reforçando a compreensão desta ideia através da exploração de problemas em diferentes contextos e chegando-se à conclusão de que $\left[C_p^n = C_{n-p}^n \right]$. Esta ideia, de que ao seleccionar uma amostra de p elementos de n objectos dados, há $n-p$ objectos de fora (Batanero *et al.*, 1997a, 1997b), levou, mais tarde, à compreensão e identificação de uma das propriedades do triângulo de Pascal.

As professoras acharam que os alunos não tinham maturidade para explorar ou levar a cabo este tipo de tarefas exploratórias, sendo quase impossível eles pensarem autonomamente neste nível de ensino. Então, do confronto de várias opiniões das professoras, concluiu-se que os alunos, perante uma situação desconhecida, não estão habituados a mobilizar todos os seus conhecimentos para desenvolverem pensamentos construtivos, não se esforçando para o conseguirem. Os problemas combinatórios forçam naturalmente o pensamento dos alunos, pois permitem uma variedade de representações, como o uso de *desenhos, tabelas, listagens sistemáticas e não sistemáticas, modelos concretos* e outras abordagens, que conduzem a soluções com o mínimo de conhecimentos (English, 2005) e os processos utilizados constituem estratégias gerais aplicáveis a outro tipo de problemas (Roa *et al.*, 1996).

A prática planificada nas sessões em conjunto estimulou os alunos com mais dificuldades, propiciando situações de aula mais abertas, que serviram para aumentar a confiança e auto-estima destes alunos. Foi o que se constatou, entre outros, com Amélia, aluna de Maria, e com Paulo, aluno de Margarida, cujo empenho e participação manifestados nas aulas foi notório e digno de ser evidenciado, e que se consubstanciou nas classificações obtidas no teste intermédio realizado após a leccionação das “Probabilidades”. De facto, infere-se que fizeram

uma aprendizagem profunda, porque nas questões relacionadas com a Combinatória obtiveram a cotação máxima.

5.2.2. De que forma o trabalho colaborativo se reflecte no desenvolvimento do conhecimento didáctico dos professores em Combinatória?

O professor deve proporcionar ambientes de aprendizagem adequados à formulação de conjecturas e ao uso de estratégias de enumeração, generalização e pensamento sistemático (English, 2005), entre outras, de modo a permitir aos alunos o desenvolvimento de competências de ordem superior, nomeadamente de raciocínio, abstracção e estabelecimento de conexões entre os conceitos, para que, deste modo, se faça uma aprendizagem com compreensão. Porém, tais ambientes de aprendizagem não foram observados na prática de Maria. Como pudemos verificar, nos diálogos que Maria estabeleceu com os seus alunos, constatou-se que o seu discurso era dissuasor de usarem técnicas informais de contagem e esquemas, nomeadamente o *diagrama de árvore*, recurso didáctico tão importante, pois, segundo ela, estas abordagens requerem muito tempo.

A questão da falta de tempo, no sentido de gerir a planificação, esteve sempre presente no discurso de Maria, porque pretendia acompanhar sempre os colegas da sua escola, desvalorizando, por vezes, o trabalho desenvolvido pelas colegas deste grupo. Várias vezes, durante as aulas, Maria não fez um esforço para compreender as dificuldades dos alunos, de modo a provocar um confronto entre eles para clarificar ou incentivar a emergência de vários métodos de resolução possíveis. Ela sempre orientou todas as actividades desenvolvidas e, quando detectasse uma dificuldade, era a própria a fazer o esclarecimento de imediato. Preconiza-se que os alunos partilhem os processos de resolução de problemas, devendo-os descrever e explicar, pois estes estão convencidos que os seus são os correctos (Batanero *et al.*, 1994; English, 2005; NTCM, 1991). Esta prática sugere que a solução que os alunos encontram deve sustentar-se no escrutínio dos outros, e, ao verbalizarem os seus pensamentos, os alunos aprofundam a sua aprendizagem (Maher & Martinho, 1996), fornecem informação ao professor acerca dos seus conhecimentos e permitem ao professor efectuar uma auto-avaliação do seu desempenho.

Maria, durante as sessões, fez passar a ideia de que já conhecia e fazia tudo o que era apresentado, analisado e discutido, mas ao admitir que aprendeu com Margarida, aquando a realização da entrevista final, podemos tirar a ilação de que, de facto, se tornou uma pessoa

mais atenta ao seu desempenho, isto é, à sua postura e ao seu papel e dos alunos, no decorrer da sua prática lectiva. Durante a sua prática também colocou, durante a leccionação das “combinações”, os alunos organizados “fisicamente” em grupos de quatro ou cinco elementos, tendo em consideração os conselhos das colegas durante as sessões. Podemos assim referir que se verificou alguma evolução ao tomar consciência das suas limitações e ao experienciar alternativas apresentadas pelas colegas.

A observação de aulas de outra colega e o acesso a gravações e transcrições das suas próprias aulas ou de outrem revelou-se de extrema importância para as participantes, pois possibilitou-lhes uma reflexão mais profunda e individual sobre acontecimentos da prática lectiva. Estes métodos de recolha de informação permitiram o questionamento, a problematização da acção e encetar a construção de novas perspectivas alicerçadas na tomada de consciência e na identificação de determinadas limitações, revendo-se no papel da outra. A leitura, *a posteriori*, de episódios das aulas, através das transcrições, proporcionou-lhes uma base impulsionadora da evolução das suas concepções ou ideias com vista a mudar a sua prática.

Podemos considerar este trabalho como um veículo para o desenvolvimento da comunicação, pois as participantes interiorizaram termos específicos do tema, que antes desconheciam, e que passaram a utilizar tanto na acção como nas sessões, nomeadamente “enumeração sistemática”, “configurações”, entre outros, emergindo sentimentos de confiança, empatia, respeito, cooperação e persistência (Boavida & Ponte, 2002).

Depois de realizada a segunda entrevista às participantes, verificou-se que elas modificaram as suas concepções sobre a Combinatória e o seu ensino, aprofundaram o seu conhecimento do conteúdo, adquiriram novas competências para ensinar e modificaram as suas práticas, no que concerne à adopção de novas estratégias de ensino e mesmo em termos de postura e atitude. Segundo Santos (2000), o conhecimento dos professores dirigido para a acção “é constituído e desenvolvido ao longo da experiência e da reflexão sobre a experiência. (...) [É] dinâmico e evolutivo, [e] a sua natureza é essencialmente implícita, situada e pessoal” (p. 28).

Este trabalho, ao desencadear novas possibilidades para a acção, através de novas estratégias a adoptar em termos do ensino da Combinatória, contribuiu para as professoras modificarem as suas práticas, conduzindo a melhoramentos no processo de ensino-aprendizagem. As participantes ficaram motivadas para desenvolverem um trabalho semelhante relativamente a outros conteúdos programáticos onde os professores sentem dificuldades.

Aprofundaram o seu conhecimento sobre o conteúdo na medida em que clarificaram a sua compreensão sobre os conceitos, fizeram abordagens mais abrangentes das operações combinatórias, estabelecendo relações entre elas, facto assumido explicitamente por Margarida. Por exemplo, na leccionação das combinações, segundo a abordagem sugerida por DeGuire (1991), destacou-se o estabelecimento de conexões entre as permutações e as combinações, a apresentação contextualizada do triângulo de Pascal e a exploração de *problemas de distribuição* de bolas em caixas (Batanero *et al.*, 1997a, 1997b), o que contribuiu para as professoras adquirirem um novo entendimento sobre estes tópicos e para aumentar os seus conhecimentos acerca da Combinatória.

Relativamente à observação de aulas, estas permitiram operacionalizar todo o trabalho desenvolvido nas sessões de planificação, que decorreram durante mais de um mês antes da leccionação do conteúdo, e durante a sua leccionação permitiram fazer uma ligação entre a teoria e a prática.

No diálogo mantido nas sessões, baseado na confiança, no respeito e na envolvimento dos intervenientes deste projecto de investigação e através das questões suscitadas e das dificuldades que foram emergindo, proporcionaram-se momentos de discussão ricos e potenciadores de transformações sucessivas e da aquisição de novos saberes.

Ao reflectirem sobre a prática nas sessões realizadas após o decorrer da acção, o que acontecia passado cerca de uma semana, estas professoras passaram a estar mais atentas às dificuldades dos alunos e, conseqüentemente, a centrar neles mais as aulas. É de realçar também o facto de que as gravações e transcrições que a investigadora facultou às participantes terem contribuído para que estas tomassem consciência do seu papel na sala de aula, como assumiu Maria ao se considerar a protagonista da sua aula, reconhecendo o facto de solicitar, por várias vezes, a participação do mesmo aluno, cuja resposta lhe permitia acelerar o andamento da aula. A postura de Maria poderá, desta forma, modificar-se, ainda que lentamente ao longo do tempo, visto ser uma limitação identificada e assumida.

Tendo em conta propostas apresentadas pela investigadora e pelas participantes, que tínhamos definido e discutido em grupo sobre a Combinatória, Margarida pediu autorização para que pudesse utilizar estas ideias e meios no trabalho que desenvolvia no âmbito do PAM, dado que a análise e discussão das tarefas, em sua opinião, dependendo do tipo de abordagem feita, se adaptavam perfeitamente a níveis etários mais baixos.

Margarida nunca tinha leccionado a Combinatória com os seus alunos organizados em grupos, porque considerava que a sua insegurança no conteúdo não lhe proporcionava a confiança necessária para fazer este tipo de abordagem. Também nunca tinha trabalhado, durante tanto tempo seguido, com os alunos organizados em grupos, salvaguardando o facto de que eles estavam habituados a esta prática, pois já vinha dos anos anteriores. Considerou ainda que, ao experienciar tarefas diferentes, mais motivadoras e desafiantes, deveria proporcionar um ambiente propício à sua concretização, dando mais espaço e tempo aos alunos para que, de forma autónoma e através das discussões que emergissem em pequeno e grande grupo, interagindo entre si, ultrapassassem dificuldades e chegassem à compreensão dos conceitos (Batanero *et al.*, 1994; English, 2005; Maher & Martinho, 1996; NTCM, 1991). Estas conclusões também foram referidas por outros investigadores (e.g., Almeida & Ferreira, s/d; Correia *et al.*, 2009; Eizenberg & Zaslavsky, 2003). De facto, esta professora concretizou com sucesso esta intenção.

Valorizando e respeitando o papel activo do aluno no decorrer da sua própria aprendizagem, Margarida fê-lo com verdadeira convicção, preparando muito bem todas as aulas que leccionou e considerando que o tipo de prática a implementar exigia muito do professor. Nas sessões de reflexão centrava-se no papel que tinha desempenhado, sempre de uma forma crítica, e, por vezes, pessimista em relação aquilo que tinha feito, colocando muitas dúvidas às colegas que assistiram às suas aulas, pedindo-lhes que apontassem falhas e sugerissem alternativas no sentido de aperfeiçoar o seu desempenho. Deste modo, procurou sempre evoluir, ser melhor como professora.

Margarida mostrou sempre muita preocupação com o seu papel na gestão e orientação das discussões no grupo turma, no tipo de questões a colocar, sentindo-se satisfeita por ouvir os seus alunos e por se deixar influenciar pelas suas questões, que lhe alteravam a planificação e a conduziam para situações incertas das quais desconhecia o desfecho, sem nunca descurar, no entanto, os objectivos da aula. Margarida soube lidar com estes momentos, os quais contribuíram para que desenvolvesse o seu *conhecimento na acção* (Schön, 1992).

Porém, Margarida sentiu dificuldades na gestão do tempo, tendo, por vezes, permitido demasiado tempo para a realização de actividades, quando os próprios alunos sentiam que a tarefa já estava concretizada. Posteriormente, nas sessões, partilhava esta preocupação, tomando consciência da sua complexidade, e proferia que, quando leccionasse pela segunda vez o mesmo assunto funcionaria melhor. A este respeito deve salientar-se que Margarida tinha duas

turmas, nas quais utilizava as mesmas propostas de trabalho, donde percepcionava que as dificuldades enfrentadas poderiam ser ultrapassadas mais rapidamente quando leccionasse o mesmo assunto pela segunda vez pois essas dificuldades tornavam-se mais previsíveis. É de realçar que durante as aulas que Margarida implementou, sobretudo no ensino das “combinações” se notou, em vários momentos, uma certa insegurança a nível de conteúdo na condução das tarefas e, por vezes, parece não ter compreendido as dificuldades e ideias dos alunos.

Maria mostrou ter um elevado grau de exigência para consigo própria e para com os seus alunos. É muito expansiva e gosta de conversar, assumindo sempre um papel de grande protagonismo. Esta docente advogava que os alunos tinham que compreender a Combinatória, e, para isso, orientava sempre a exploração das tarefas propostas. A resolução desta contradição – aprender com compreensão e orientação excessiva dos alunos – implica que a professora obtenha informação sobre a actividade desenvolvida pelos alunos, tendo de desenvolver, para tal, competências de ouvir o aluno, intervir menos na sua aula e escutar mais, fazer perguntas abertas que despoletem possibilidades de diálogo e permitam aceder ao pensamento do aluno e aos seus conhecimentos, aumentando as suas possibilidade de envolvimento (Ponte *et al.*, 1999).

Não deve também solicitar sempre aquele aluno que tem a resposta correcta que se pretende, como assumiu Maria, ao solicitar demasiadas vezes os alunos André e Patrícia. Diferentemente, permitindo a intervenção de todos os alunos, deve estimular-se a criatividade de todos, o poder de argumentação, a formulação de conjecturas, o estabelecimento de conexões entre as ideias matemáticas. Neste último caso, o professor deve questionar e recordar os alunos acerca dos pré-requisitos necessários à aprendizagem de um dado conteúdo, como Maria fez na aula em que leccionou o “binómio de Newton”, em que o diálogo que desencadeou com os alunos acerca das potências foi, sem dúvida, potenciador de uma aprendizagem significativa.

Johnson (1991) destaca a necessidade de os alunos analisarem e discutirem em conjunto os vários processos de resolução de problemas, estejam eles correctos ou errados, como meio facilitador do desenvolvimento do raciocínio combinatório e importante na construção de esquemas e representações. No entanto, Maria referiu durante as sessões, que, quando os seus alunos conheciam as respostas correctas, não ficavam motivados para descobrir a razão de ser de outro tipo de resposta. No caso de serem respostas erradas, então perdiam todo o interesse

em explorar tais situações, em discutir o que está errado. Na sua opinião, o erro deveria ser desvalorizado.

No currículo vigente, as competências de cálculo foram desvalorizadas pelo uso obrigatório da calculadora gráfica e do computador, que constituem ferramentas ideais para substituir tais destrezas, incluindo-se actualmente orientações curriculares de desenvolvimento de competências de ordem superior (NTCM, 1991). Porém, Maria é apologista de que o cálculo faz falta e, no exame nacional, até costumam sair uns exercícios de simplificação de fórmulas. Então, no sentido de preparar os seus alunos para o exame, sentiu necessidade de disponibilizar 90 minutos de uma aula extra no treino destes procedimentos, que culminou precisamente na orientação destes para a aprendizagem dos arranjos simples, pois Maria leccionou primeiro as permutações, depois ocorreu esta aula e, logo de seguida, leccionou os arranjos simples.

O programa é explícito em termos de tarefas, de recursos didácticos e de objectivos, porém continua a ser extenso, tornando-se pouco exequível em termos de conciliar todas estas dimensões com o factor tempo, pois os testes intermédios tendem a regular toda a prática lectiva. São factores que condicionam o tipo de trabalho dos professores, porque estes não se podem atrasar na leccionação dos conteúdos, visto serem apontados pelos colegas, como afirmava Margarida. Por outro lado, o tipo de avaliação veiculado pelos testes não se coaduna com o tipo de tarefas abertas e com o ensino por descoberta, que seria suposto implementar nas aulas. Assim, se o professor cumpre o que o currículo advoga, não prepara os alunos para os testes e exames; se prepara para os testes e exames, não pode concretizar o que o currículo enfatiza. Desta forma, o professor sente uma grande pressão, pois o tipo de prática com vista a desenvolver nos alunos capacidades de ordem superior acaba por ser impraticável, visto o professor, como afirma Maria, ser avaliado externamente pelas classificações dos seus alunos nos exames nacionais. Consequentemente, perante esta situação constrangedora, o professor opta, por vezes contrariado, por ministrar o tipo de ensino que se adapta ao fim pretendido: “tirar excelentes classificações no exame nacional”. Assim, preparam-se os alunos para um exame de 120 minutos em vez de os preparar para a vida, de lhes desenvolver competências de raciocínio, comunicação, argumentação, etc., incluindo as competências transversais, as quais não são contempladas de forma explícita num plano de aula.

A adesão a novas estratégias e/ou metodologias na prática docente permitiu concluir que ocorreu alguma mudança, contribuindo para uma melhoria do conhecimento didáctico das participantes e da investigadora. Neste processo de mudança, a colaboração e a reflexão

realizadas nas sessões foram os instrumentos fundamentais, como defende Poletini (1999, p. 194): “Reflectimos, reavaliando e reorganizando experiências vividas, no sentido de procurar orientação para experiências futuras, sendo nesta perspectiva muito importante a reflexão sobre o pensamento e a reflexão sobre a nossa prática e a prática dos outros”.

Ao planificarmos a acção, as professoras e a investigadora tiveram em consideração as vivências, os conhecimentos e as informações que o aluno traz e a sua forma de estar na vida, para adaptar as estratégias aos interesses e capacidades dos alunos, promovendo, desta forma, uma aprendizagem significativa.

Ou seja, eu acho que nós pegámos numa estrutura estanque que estava definida [no teste] e fomos adaptá-la àquilo que nós tínhamos aprendido, àquilo que nós tínhamos visto que eram as dificuldades dos nossos alunos, e que seria a mais-valia, no fundo, de aprendizagem. E nós acabámos por discutir e analisar processos e definir uma estrutura e depois implementar em contextos diferentes. Porque analisámos que, no meu contexto, na minha turma, aquilo era melhor, mas sempre partindo dum princípio e de uma base de trabalho comum. (Maria, entrevista final)

A Combinatória, segundo Batanero *et al.* (1994), é um conteúdo que faz parte do currículo do ensino secundário de muitos países, mas segundo Ponte e Fonseca (2000), o ensino das Probabilidades em Portugal é mais exigente do que nos Estados Unidos e na Inglaterra. Nestes países inicia-se o ensino deste tema em níveis mais baixos. Margarida é de opinião que o currículo deveria contemplar a Combinatória, o quanto antes, já que não depende de conhecimentos prévios específicos (Kapur, 1970). Já Maria começou por concordar que deve ser no 12.º ano, pois os alunos não têm maturidade suficiente, nos níveis mais baixos, para fazerem uma aprendizagem com compreensão, enquanto na entrevista final, mudando de opinião, atribuiu as dificuldades às estratégias implementadas e às tarefas desenvolvidas, que convenientemente adaptadas ao nível de ensino poderiam tornar possível o seu ensino.

Margarida, ao enfatizar que os alunos deveriam ter tempo para pensar, para discutir de forma independente – devendo para esse fim estar organizados em grupos de trabalho –, resolver problemas e analisar raciocínios correctos ou errados estava a seguir as propostas de ensino que Johnson (1991) preconiza. Este autor defende também o uso de jogos, nomeadamente de jogos de dominó, que analisámos em sessões, disponibilizando-se Margarida para os adaptar e implementar no seu 9.º ano.

É de enfatizar que Margarida considerava os jogos e outros materiais que usou nas aulas como meios facilitadores de uma aprendizagem com compreensão. Também Maria usou, com sucesso, materiais concretos na explicação das “permutações com repetição”.

Os professores devem diversificar estratégias pois uns alunos preferem um ensino mais concreto e outros um ensino mais abstracto, uns preferem um ensino individual e outros um ensino de grupo, uns preferem um ensino centrado na descoberta e na confrontação de ideias e argumentos e outros preferem um ensino mais orientado e expositivo.

Observar e ouvir mais os alunos, reflectir na e sobre a prática pedagógica, ter uma atitude de investigação na acção e na preparação da acção, problematizar e questionar a sua acção na perspectiva do outro, através da observação da acção deste, e tentar procurar alternativas de actuação no outro, no sentido de melhorar a sua acção e desenvolver competências que prepare os alunos para a cidadania, são atitudes que as participantes identificaram como importantes e necessárias para melhorarem o processo de ensino-aprendizagem e, por isso, consideradas potenciadoras de mudança em resultado da análise, reflexão e compreensão das situações vivenciadas ou observadas.

Apesar de lento e do reconhecimento de pequenos avanços em considerar novas tarefas que contextualizassem a troca e o confronto de ideias e de opiniões entre os alunos, visando centrar mais o ensino nas suas experiências, as actividades implementadas revelaram-se uma mais-valia ao permitirem às professoras desenvolver a abertura à inovação e aprofundar o seu conhecimento didáctico.

Ambas as participantes consideraram vantajosa (Santos, 2000), a sua participação nesta investigação pois aprenderam, conheceram e experienciaram estratégias e situações nunca antes por elas vivenciadas, nomeadamente o assistir às aulas uma da outra, o que potenciou consideravelmente, a par da reflexão desencadeada individualmente e conjuntamente nas sessões, o pôr em causa as suas concepções e o trabalho desenvolvido durante a prática lectiva e, conseqüentemente, o aprofundamento do seu conhecimento didáctico nas suas diferentes vertentes.

5.3. Recomendações para futuras investigações

Considerando os resultados do presente estudo e tendo em vista aprofundar o conhecimento no âmbito da problemática aqui abordada, apresentamos nesta secção algumas sugestões de futuras investigações a desenvolver, tanto relacionadas com o tema da Combinatória como do trabalho colaborativo.

Relativamente ao trabalho colaborativo, teria interesse proceder a um estudo semelhante a este integrando como participantes professores com mais anos de idade e de serviço, com

percursos profissionais menos ricos, pois, como verificámos, Maria e Margarida possuíam um curso de pós-graduação e um mestrado, respectivamente, e já tinham experienciado o trabalhar de forma colaborativa. Avaliar o tipo de competência que esses profissionais apresentariam na superação das várias dificuldades experienciadas e nas limitações identificadas na prática pedagógica observada, num contexto de trabalho colaborativo, acrescentaria um conhecimento importante àquele aqui adquirido.

No que concerne à Combinatória, à medida que a problemática desta investigação se foi desenvolvendo, as professoras verificaram que sentiam dificuldade na avaliação dos seus alunos, inferindo que o tipo de instrumentos utilizados, nomeadamente os testes, não se coadunava com o tipo de estratégias desenvolvidas durante a leccionação do tema. A implementação dos testes intermédios exigia o desenvolvimento de competências por parte dos alunos, nomeadamente a resolução de problemas rotineiros, que estavam fora do âmbito deste trabalho. Onde, torna-se pertinente clarificar o tipo de avaliação consistente que subjaz a este tipo de prática.

Seria também importante investigar se de facto as participantes, em próximos anos de leccionação deste tema, implementariam as mesmas tarefas ou tarefas semelhantes e as metodologias subjacentes, ou seja, constatar se de facto se processaram as mudanças de postura e atitude valorizadas ao longo da experiência realizada.

Finalmente, uma outra sugestão, relacionada com a anterior, advém do facto de poder ser transferida para a leccionação de outros tópicos matemáticos o tipo de metodologia e abordagem utilizada pelas participantes nesta investigação, no âmbito do ensino do tema de Combinatória. Assim, no caso destas professoras, seria do maior interesse conhecer em que medida elas transferem as perspectivas de ensino e aprendizagem preconizadas, discutidas e implementadas na presente experiência para outros temas matemáticos.

BIBLIOGRAFIA

- Alarcão, I. (1996). Ser professor reflexivo. In I. Alarcão (Org.), *Formação reflexiva de professores: Estratégias de supervisão* (pp. 171-198). Porto: Porto Editora.
- Alarcão, I. (2001). Professor investigador. Que sentido? Que formação? Em B. P. Campos (Org.), *Formação profissional de professores no ensino superior* (Vol. I, pp. 21-31). Porto: Porto Editora.
- Alarcão, I. & Tavares, J. (2003). *Supervisão da Prática Pedagógica – Uma perspectiva de desenvolvimento e aprendizagem*. Coimbra: Livraria Almedina.
- Alarcão, I. (2004). *Professores Reflexivos numa Escola Reflexiva*. São Paulo: Cortez.
- Almeida, C. & Martinho, H. (2003). Processos de resolução de problemas de análise combinatória numa turma do 7.º ano. In A. Cosme, H. Pinto, H. Menino, I. Rocha, M. Pires, M. Rodrigues *et al.* (Orgs.), *Actas do XIV Seminário de Investigação em Educação Matemática* (pp. 505-524). Lisboa: Associação de Professores de Matemática.
- Almeida, A. L. & Ferreira, A. C. (s/d). *Aprendendo análise combinatória através da resolução de problemas: um estudo com classes de 9.º ano do ensino fundamental e 2.º ano do ensino médio*. Consultado em 24 de Maio de 2009 em http://www2.rc.unesp.br/eventos/matematica/ebapem2008/upload/261-1-A-gt11_almeida_e_ferreira_ta.pdf
- Amaral, M. J., Moreira, M. A. & Ribeiro, D. (1996). O papel do supervisor no desenvolvimento do professor reflexivo. Estratégias de supervisão. In I. Alarcão (Org.), *Formação reflexiva de professores: Estratégias de Supervisão* (pp. 91-119). Porto: Porto Editora.
- Batanero, C. (2004). Ideas estocásticas fundamentales. ¿Qué contenidos se debe enseñar en la clase de probabilidad? In J. A. Fernandes, M. V. Sousa & S. A. Ribeiro (Orgs.), *Ensino e Aprendizagem de Probabilidades e Estatística: Actas – I Encontro de Probabilidades e Estatística na Escola* (pp. 85 - 102). Braga: Centro de Investigação em Educação, Instituto de Educação e Psicologia da Universidade do Minho.
- Batanero, C., Godino, J. D. & Navarro-Pelayo, V. (1994). *Razonamiento Combinatorio*. Madrid: Síntesis.
- Batanero, C., Godino, J. D. & Navarro-Pelayo, V. (1997a). Combinatorial reasoning and its assessment. In I. Gal & J. B. Garfield (Eds.), *The assessment challenge in statistics education* (pp. 239-252). Amsterdam: ISO Press.

- Batanero, C. Navarro-Pelayo, V. & Godino, J. D. (1997b). Effect of the implicit combinatorial model reasoning in secondary school pupils. *Educational Studies in Mathematics*, 32(2), 181-199.
- Boavida, A. M. & Ponte, J. P. (2002). Investigação colaborativa: Potencialidades e problemas. In Grupo de Trabalho de Investigação (Eds.), *Reflectir e investigar sobre a prática profissional* (pp. 43-55). Lisboa: Associação de Professores de Matemática.
- Bogdan, R. & Biklen, S. (1994). *Investigação qualitativa em educação*. Porto: Porto Editora.
- Borovcnik, M., Bentz, H.-J. & Kapadia, R. (1991). A probabilistic perspective. In R. Kapadia & M. Borovcnik (Eds.), *Chance encounters: Probability in education* (pp. 27-71). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.
- Caetano, A. P. (2004). A mudança dos professores pela investigação-acção. *Revista Portuguesa de Educação*. 17(1), 97-118.
- Calderhead, J. (1989). Reflective teaching and teacher education. *Teaching and Teacher Education*, 5(1), 43-51.
- Correia, P. F. & Fernandes, J. A. (2007). Estratégias intuitivas de alunos do 9.º ano de escolaridade na resolução de problemas de combinatória. In A. Barca, M. Peralbo, A. Porto, B. Duarte da Silva & L. Almeida (Eds.), *Libro de Actas do Congreso Internacional Galego-Portugués de Psicopedagogía* (pp. 1138-1663). A.Coruña/Universidade da Coruña: Revista Galego-Portuguesa de Psicología e Educación.
- Correia, P. F. (2008). *Raciocínios em combinatória de alunos do 9.º ano de escolaridade*. Dissertação de Mestrado não publicada, Universidade do Minho, Braga.
- Correia, P. F., Fernandes, J. A., & Almeida F. (2009). Ensino e aprendizagem das operações combinatórias no 12.º ano de escolaridade. In J. A. Fernandes, F. Viseu, M. H. Martinho & P. F. Correia (Orgs.), *Actas do II encontro de Probabilidades e Estatística na escola* (pp. 129-152). Braga: Centro de investigação em educação da Universidade do Minho, CD-ROM.
- Day, C. (2001). *Desenvolvimento profissional de professor: Os desafios da aprendizagem permanente*. Porto: Porto Editora.
- DeGuire L. J. (1991). Permutations and Combinations: A problem- solving Approach for Middle School Students. M. J. Kenney & C. R. Hirsch (Eds.), *Discrete Mathematics across the curriculum, k-12* (pp. 59-66). Reston, VA: National Council of teachers of Mathematics.
- Dubois, J. G. (1984). Une Systématique des configurations combinatoires simples. *Educational*

- Studies in Mathematics*, 15(1), 37-57.
- Eizenberg, M. & Zaslavsky, O. (2003). Cooperative problem solving in combinatorics: The interrelations between control processes and successful solutions. *Journal of Mathematical Behaviour*, 22(4), 389-403.
- Elbaz, F. (1983). *Teacher Thinking: a Study of Practical Knowledge*. London: Croom Helm.
- English, L. (1991). Young children's combinatoric strategies. *Educational Studies in Mathematics*, 22, 451-474.
- English, L. (1998). Rethinking what it means to understand: the case of combinatorial problem solving. In C. Kanes, M. Goos & E. Warren (Eds.), *Teaching mathematics in new times, Proceedings of the twenty first annual conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia* (vol. I, pp. 185-193). Brisbane, Australia: Mathematics Education Research.
- English, L. (2005). Combinatorics and the development of children's combinatorial reasoning. In J. Graham, (Ed.), *Exploring probability in school: Challenges for teaching and learning* (pp. 121-141). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.
- Fernandes, J. A. (1990). *Concepções erradas na aprendizagem de conceitos probabilísticos*. Dissertação de Mestrado não publicada, Universidade do Minho, Braga.
- Ferreira, A. C. (2006). Trabalho colaborativo e desenvolvimento profissional de professores de Matemática: Reflexões sobre duas experiências brasileiras. *Quadrante*, 15(1), 121-144.
- Ferreira, J. S. (2007). *O ensino da combinatória no 12.º ano de escolaridade: análise das estratégias de ensino*. Dissertação de Mestrado não publicada, Universidade do Minho, Braga.
- Fischbein, E. (1975). *The intuitive sources of probabilistic thinking in children*. Dordrecht: Reidel.
- Fischbein, E., Pampu, I. & Mînzat, I. (1970). Effects of age and instruction on combinatorial ability in children. In E. Fischbein (1975), *The intuitive sources of probabilistic thinking in children* (Appendix IV, pp. 189-201). Dordrecht: Reidel.
- Fullan, M., Hargreaves, A. (2001). *Porque é que vale a pena lutar?* Porto: Porto Editora
- Gall, M. D., Borg, W. R. & Gall, J. P. (1996). *Educational research: An introduction*. New York: Longman Publishers USA.
- Garcia, C. M. (1995). A formação de professores: novas perspectivas baseadas na investigação sobre o pensamento do professor. In A. Nóvoa (Ed.), *Os professores e a sua formação* (pp. 51-76). Lisboa: Dom Quixote.

- Garnica, A. V. & Fernandes D. N. (2002). Concepções de professores formadores de professores: Exposição e análise de seu sentido doutrinário. *Quadrante*, 11(2), 75-98.
- Glazmann, R. J. & Varga, T. (1973). *Les probabilités à l'école*. Paris: CEDIC.
- Godinho, J. D., Batanero, C. & Cañizares, M. J. (1997). *Azar y Probabilidad*. Madrid: Síntesis.
- Hargreaves, A. (1998). *Os professores em tempo de mudança*. Lisboa: McGraw-Hill.
- Hart, E. W. (1991). Discrete mathematics: An exciting and necessary addition to the secondary school curriculum. In M. J. Kenney & C. R. Hirsch (Eds.), *Discrete mathematics across the curriculum, K-12* (pp. 67-77), Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.
- Heitele, D. (1975). An epistemological view on fundamental stochastic ideas. *Educational Studies in Mathematics*, 6, 187-205.
- Huberman. A. M. (1973). *Como se realizam as mudanças em educação. Subsídios para o estudo do problema da inovação*. Editora Cultrix. São Paulo.
- Johnson, J. (1991). Using Dominoes to Introduce Combinatorial Reasoning. In M. J. Kenney & C. R. Hirsch (Eds.), *Discrete Mathematics across the curriculum, k-12* (pp. 128-136). Reston, VA: National Council of teachers of Mathematics.
- Kapur, J. N. (1970). Combinatorial analysis and school mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, 3(1), 111-127.
- Kenney M. J. & C. R. Hirsch (Eds.), *Discrete Mathematics across the curriculum, k-12*. Reston, VA: National Council of teachers of Mathematics.
- Korthagen, F. (2001a). A reflection on reflection. In F. Korthagen, J. Kessels, B. Koster, B. Lagerwerf, & T. Wubbels (Eds.), *Linking practice and theory: The pedagogy of realistic teacher education* (pp. 51-68). Mahwah, NJ: Erlbaum.
- Korthagen, F. (2001b). A broader view of reflection. In F. Korthagen, J. Kessels, B. Koster, B. Lagerwerf, & T. Wubbels (Eds.), *Linking practice and theory: The pedagogy of realistic teacher education* (pp. 231-238). Mahwah, NJ: Erlbaum.
- Korthagen, F. & Lagerwerf, B. (2001). Teachers' professional learning: How does It work? In F. Korthagen, J. Kessels, B. Koster, B. Lagerwerf, & T. Wubbels (Eds.), *Linking practice and theory: The pedagogy of realistic teacher education* (pp. 175-206). Mahwah, NJ: Erlbaum.
- Lei de Bases do Sistema Educativo Português, Lei nº 46/86, de 14 de Outubro, com alterações introduzidas pela Lei nº 115/97, de 19 de Setembro.
- Lima, J. A., (2002). *As culturas colaborativas nas escolas: Estruturas, processos e conteúdos*. Porto: Porto Editora.

- Little, J. (1990). The persistence of privacy: Autonomy and initiative in teachers' professional relations. *Teachers Collage Record*. 9(4), 509-536.
- Maier, C. A., & Martinho, A. M. (1996). Young children invent methods of proof: The gang of four. In L. P. Steffe & P. Nesher (Eds.), *Theories of mathematical learning* (pp. 431-448). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum.
- Martinho, H. (2007). *A comunicação na sala de aula de Matemática: um projecto colaborativo com três professoras do ensino básico*. Tese de doutoramento não publicada, Universidade de Lisboa.
- Martins, C. & Santos, L. (2008). Reflectindo sobre a prática: Nunca tive um dia como o de ontem!. *ProfMat2008* (CD-ROM). Lisboa: Associação de Professores de Matemática.
- Martins, M. E., Monteiro, C., Viana J. P. & Turkman, M. A. (1999). *Probabilidades e Combinatória: Matemática – 12.º ano de escolaridade*. Lisboa: Ministério da Educação.
- Mason, J. (1996). Resolução de problemas matemáticos no Reino Unido: Problemas abertos, fechados e exploratórios. In P. Abrantes, L. C. Leal & J. P. Ponte (Eds.), *Investigar para aprender matemática: Textos seleccionados* (pp. 15-24). Lisboa: Projecto MPT e APM. (publicado originalmente em inglês em 1991).
- Matos, J. M. & Serrazina, M. L. (1996). *Didáctica da Matemática*. Lisboa: Universidade Aberta.
- Ministério da Educação (2002). *Programa de Matemática A (10.º, 11.º e 12.º anos)*. Lisboa: Autor.
- National Council of Teachers of Mathematics (1991). *Normas para o currículo e a avaliação em matemática escolar*. Lisboa: Associação de Professores de Matemática e Instituto de Inovação Educacional. (Tradução portuguesa do original de 1989.)
- National Council of Teachers of Mathematics (1994). *Normas profissionais para o ensino da matemática*. Lisboa: Associação de Professores de Matemática e Instituto de Inovação Educacional. (Tradução portuguesa do original de 1991.)
- Oliveira, I. & Serrazina, L. (2002). A reflexão e o professor como investigador. Em GTI - Grupo de Trabalho de Investigação (Org.), *Reflectir e investigar sobre a prática profissional* (pp. 29-42). Lisboa: APM.
- Patton, M.Q. (1987). *How to use qualitative methods in evaluation*. Newbury Park, NJ: Sage
- Piaget, J. & Inhelder, B. (s/d). *A origem da ideia do acaso na criança*. Rio de Janeiro: Editora Record. (Tradução portuguesa do original de 1951.)

- Polettini, A. F. F. & Sabaraense, N. C. (1999). Inovação, mudança e o desenvolvimento profissional do professor de Matemática. *Quadrante*, 8(1-2),
- Ponte, J. P. (1992). Concepções dos professores de Matemática e processos de formação. In M. Brown, D. Fernandes, J. F. Matos & J. P. Ponte (Orgs.), *Educação Matemática: Temas de investigação* (pp.185-240). Lisboa: Instituto de Inovação Educacional e Secção de Educação Matemática da Sociedade Portuguesa de Ciências da Educação.
- Ponte, J. P. (1994). O estudo de caso na investigação em educação matemática. *Quadrante*, 3(1), 3-18.
- Ponte, J. P. (1998). Da formação ao desenvolvimento profissional. In Comissão Organizadora do ProfMat 98 (Ed.), *Actas do ProfMat 98* (pp. 27-42). Guimarães: Associação de Professores de Matemática.
- Ponte, J. P. (1999). Didácticas específicas e construção do conhecimento profissional. In J. Tavares, A. Pereira, A. P. Pedro & H. A. Sá (Eds.), *Investigar e formar em educação: Actas do IV Congresso da SPCE* (pp. 59-72). Porto: SPCE.
- Ponte, J. P. (2002). Investigar a nossa própria prática. In GTI-Grupo de Trabalho de Investigação (Org.), *Reflectir e investigar sobre a prática profissional* (pp. 5-28). Lisboa: APM.
- Ponte, J. P. (2003). Didácticas: Que desafios? In A. Neto, J. Nico, J. C. Chouriço, P. Costa & P. Mendes (Eds.), *Didácticas e metodologias da educação: Percursos e desafios*, 2, (pp. 1413-1417). Évora: Departamento de Pedagogia e Educação da Universidade de Évora.
- Ponte, J. P. (2005). Gestão curricular em Matemática. *O professor e o desenvolvimento curricular*, GTI (pp. 11-34). Lisboa: APM.
- Ponte, J. P. & Santos, L.(1998). Práticas lectivas num contexto de reforma curricular. *Quadrante*, 7(1), 3-33.
- Ponte, J. P., Ferreira, C., Varandas, J., Brunheira, L. & Oliveira, H. (1998). *A relação professor-aluno na realização de investigações matemáticas*. Lisboa: APM.
- Ponte, J. P., Oliveira, H., Brunheira, L., Varandas, J. M., & Ferreira, C. (1999). O trabalho do professor numa aula de investigação matemática. *Quadrante*, 7(2), 41-70.
- Ponte, J. P. & Serrazina, M. L. (2000). *Didáctica da Matemática do 1.º ciclo*. Lisboa: Universidade Aberta.
- Ponte, J. P. & Fonseca, H. (2000). A estatística no Currículo do Ensino Básico e Secundário. In Loureiro, C., Oliveira, F. & Brunheira, L. (Orgs.), *Ensino e Aprendizagem da Estatística* (pp.179-194). Lisboa: Sociedade Portuguesa de Estatística, Associação de Professores de

Matemática, Departamentos de Educação e de Estatística e Investigação Operacional da Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa.

- Roa, R., Batanero, C., Godino, J. D. & Cañizares, M. J. (1996). Estrategias en la resolución de problemas combinatorios por estudiantes con preparación matemática avanzada. *Epsilon*, 36, 433-446.
- Romberg, T. A. (1993). How one comes to know: models and theories of the learning of mathematics. In M. Niss (Ed.), *Investigations into assessment in mathematics education: An ICMI study* (pp. 97–111). Dordrecht, The Netherlands: Kluwer.
- Russell, S. & Friel, S. (1989). Collecting and analyzing real data in the elementary school classroom. In P. R. Trafton & A. P. Shulte (Eds.), *New directions for elementary school mathematics* (pp. 134-148). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.
- Santos, L. (2000). *A prática lectiva como actividade de resolução de problemas: um estudo com três professoras do ensino secundário*. (Tese de doutoramento, Universidade de Lisboa) Lisboa: Associação de Professores de Matemática, Colecção Teses.
- Serrazina, M. L. (1999). Reflexão conhecimento e práticas lectivas em Matemática num contexto de reforma curricular no 1º ciclo. *Quadrante*, 8, 139-167.
- Schön, D. (1987). *Educating the reflective practitioner*. New York: Jossey-Bass.
- Schön, D. (1992). Formar professores como profissionais reflexivos. In A. Nóvoa (Ed.), *Os Professores e a sua formação* (pp. 77-92). Lisboa: Dom Quixote.
- Spangler, D. A. (1991). The Pigeonhole Principle: A Counting technique for the middle grades. M. J. Kenney & C. R. Hirsch (Eds.), *Discrete Mathematics across the curriculum, k-12* (pp. 55-58). Reston, VA: National Council of teachers of Mathematics.
- Shulman, L. S. (1986). Those who understand: Knowledge growth in teaching. *Educational Researcher*, 15(2), 4-14.
- Shulman, L. S. (1993). Renewing the pedagogy of teacher education: The impact of subject specific conceptions of teaching. In L. Mesa & J. Jeremias (Eds.), *Las Didácticas específicas en la formación del profesorado* (pp. 53-69). Santiago de Compostela: Tórculo Ediciones.
- Silva, D. N., Fernandes, J. A. & Soares, A. J. (2004). Intuições de alunos de 12.º ano em combinatória: Um Estudo Exploratório. In J. A. Fernandes, M. V. Sousa & S. A. Ribeiro (Orgs.), *Ensino e Aprendizagem de Probabilidades e Estatística: Actas – I Encontro de*

- Probabilidades e Estatística na Escola (pp. 61-84). Braga: Centro de Investigação em Educação, Universidade do Minho.
- Sriraman, B. & English, L. (2004). Combinatorial Mathematics: *Research into Practice*. *Mathematics Teacher*, 98(3), 182-191.
- Tompson, A. (1992). Teachers' Beliefs and Conceptions: A Synthesis of the Research. In D.A. Grouws (Ed.), *Handbook of Research on Mathematics Learning and Teaching* (pp. 127-146). New York, NY: Macmillan.
- Townsend, M. (1987). *Discrete Mathematics: Applied Combinatorics and Graph Theory*. Menlo Park, Calif: Benjamin-Cummings Publishing Co.
- Tuckman, B. (2000). *Manual de investigação em educação*. Lisboa: Fundação Calouste Gulbenkian.
- Varandas, J. (2000). *Avaliação de investigações matemáticas: uma experiência*. Tese de mestrado. Universidade de Lisboa.
- Yin, R. (2005). *Estudo de caso. Planeamento e métodos*. São Paulo: Bookman.
- Zeichner, K. (1993). *A formação reflexiva de professores: Ideias e práticas*. Lisboa: Educa.
- Watson, R. (1996). Student Combinatorial Strategies. *Teaching Mathematics and its Applications*, 15(1), 27-32.

ANEXO I

(Pedido de autorização ao Conselho Executivo, aos Encarregados de Educação e às
Participantes)

Pedido de autorização ao Conselho Executivo

Exmo. Senhor
Presidente do Conselho Executivo
Escola Secundária/3

No âmbito do Curso de Mestrado em Educação – Supervisão Pedagógica em Ensino da Matemática, da Universidade do Minho, encontro-me na fase inicial de elaboração da dissertação de mestrado, intitulada **O trabalho colaborativo como meio de desenvolvimento do conhecimento didáctico de professores de Matemática no tema de Análise Combinatória.**

O desenvolvimento da dissertação implica a recolha de dados, que serão obtidos através de observação, de entrevista e de análise documental.

A observação ocorre no contexto natural onde se desenvolve a investigação, e acontece em interacção com os participantes. No estudo participarão, em princípio, quatro professoras de Matemática do 3.º ciclo do ensino básico e do ensino secundário, das quais três da Escola Secundária/3, que irão leccionar o tema de Análise Combinatória, no 12.º ano, no ano lectivo de 2008-2009. Na selecção das professoras, além da sua disponibilidade e interesse para participarem no estudo, disponibilidade essa manifestada em contacto já efectuado no ano lectivo anterior, procurar-se-á atender a diferentes experiências de ensino, designadamente no que se refere ao ensino do tema de Análise Combinatória.

Serão observadas e áudio-gravadas todas as reuniões de planificação, de partilha de ideias e de reflexão conjunta, bem como serão também observadas e áudio-gravadas aulas no âmbito do ensino do tema de Análise Combinatória, que serão objecto de reflexão e análise nas reuniões com todas as participantes e a investigadora.

Tornar-se-á indispensável, do ponto de vista metodológico, recorrer à entrevista para se tentar perceber, nos discursos e representações dos professores, o significado das mudanças ocorridas, possibilitando, com maior facilidade, a apreensão da compreensão que os próprios sujeitos fazem acerca dos fenómenos nos quais estão envolvidos e implicados.

As entrevistas serão realizadas segundo um guião orientador definido previamente e são caracterizadas por permitirem flexibilidade na ordem das questões e na inclusão de novas questões, no decorrer da entrevista. Nesta investigação, pretende-se realizar entrevistas individuais e em grupo, e serão realizadas antes e depois de concluída a leccionação do tema Análise Combinatória.

O registo das entrevistas será efectuado em suporte áudio, procedendo-se, posteriormente, à sua transcrição para suporte informático e de papel.

De forma a viabilizar este projecto de investigação, solicito a V. Exa. autorização para realizar as entrevistas, e as reuniões, a realizar numa sala que reúna as condições físicas desejáveis desta escola, dado tratar - se de um lugar que, em princípio, é central para todas as professoras envolvidas. Essas reuniões terão como objectivo clarificar e verificar o trabalho desenvolvido, a discussão emergente na preparação da acção do professor, bem como a reflexão que estes fazem sobre a acção, pré-acção e pós-acção, contribuindo, desta forma, para o seu desenvolvimento profissional. Solicito ainda autorização para assistir a aulas das colegas participantes da Escola, [três professoras de Matemática que leccionam o 12.º ano] em horário a definir e que será durante o período de tempo em que decorrerá a leccionação do tema “Análise Combinatória”.

Quer no processo de recolha de dados, quer no relatório da investigação, comprometo-me a garantir o anonimato em relação à identidade das professoras e da escola e ainda a solicitar autorização aos Encarregados de Educação, bem como a comunicar-lhes o dia e a hora em que as aulas serão assistidas e áudio-gravadas, bem como, se necessário, a implementação de aulas extra para não comprometer o cumprimento do programa.

Agradecendo a sua atenção ao pedido formulado, subscrevo-me com os melhores cumprimentos.

1 de Setembro de 2008.

A Professora de Matemática e investigadora

(Bárbara Vilamarim do Alvar de Carvalho)

Pedido de autorização aos Encarregados de Educação

Exmo(a). Senhor(a) Encarregado(a) de Educação,

No âmbito do Curso de Mestrado em Educação – Supervisão Pedagógica em Ensino da Matemática, da Universidade do Minho, encontro-me na fase inicial de elaboração da dissertação de mestrado, intitulada **O trabalho colaborativo como meio de desenvolvimento do conhecimento didáctico de professores de Matemática no tema de Análise Combinatória**.

A Análise Combinatória é um tópico leccionado pela primeira vez no 12.º ano de escolaridade, integrado no tema “Probabilidades e Combinatória”, sendo considerado um conteúdo difícil, quer por alunos quer por professores. Neste contexto, pretendo levar a efeito um estudo sobre o contributo que o trabalho em colaboração pode ter na predisposição para enfrentar mudanças e no desenvolvimento de expectativas positivas dos professores em relação às possibilidades de êxito dos alunos na aprendizagem do conteúdo de Análise Combinatória.

No estudo participam duas professoras de Matemática do 3.º ciclo do ensino básico e do ensino secundário, das quais uma é da Escola Secundária/3, [professora], que irá leccionar o tema de Análise Combinatória, do 12.º ano, no ano lectivo de 2008-2009.

O desenvolvimento da dissertação implica a recolha de dados, que serão obtidos através de observação, de entrevista e de análise documental. No caso dos alunos, serão observadas e áudio-gravadas aulas no âmbito do ensino do tema de Análise Combinatória, que serão objecto de reflexão e análise nas reuniões com todas as participantes e a investigadora.

Após autorização concedida pelo Conselho Executivo da Escola Secundária/3, venho **solicitar a sua autorização para proceder ao registo em suporte áudio de algumas aulas onde estará presente o seu educando**, em horário a definir no período de tempo em que decorrerá a leccionação da “Análise Combinatória”, que se prevê que aconteça durante as três últimas semanas de Outubro e as duas primeiras de Novembro.

Pela minha parte, enquanto pessoa com acesso aos dados recolhidos, comprometo-me a garantir o anonimato em relação à identidade da professora, da escola e de todos os alunos da

turma. Por outro lado, os dados da gravação serão apenas usados para efeitos do estudo a realizar e não terão qualquer influência nas classificações escolares dos alunos.

Muito obrigada pela colaboração.

Escola Secundária/3, 22 Setembro 2008

A Professora de Matemática e investigadora,

(Bárbara Vilamarim do Alvar de Carvalho)

O Presidente do Conselho Executivo,

Sim, autorizo que se faça o registo em áudio da prestação do meu educando_____

Não, não autorizo que se faça o registo em áudio da prestação do meu educando_____

O Encarregado de Educação

Pedido de autorização às Participantes

Cara colega,

No âmbito do Curso de Mestrado em Educação, Especialização em Supervisão Pedagógica em Ensino da Matemática, da Universidade do Minho, encontro-me na fase inicial de elaboração da dissertação de mestrado, intitulada **O trabalho colaborativo como meio de desenvolvimento do conhecimento didáctico de professores de Matemática no tema de Análise Combinatória.**

No estudo participam duas professoras de Matemática do 3.º ciclo do ensino básico e do ensino secundário, que irão leccionar o tema de Análise Combinatória, do 12.º ano, no ano lectivo de 2008-2009. Na selecção dos professores, além da amizade, disponibilidade e interesse para participarem no estudo, como é o seu caso, procurou-se atender a diferentes experiências de ensino, designadamente no que se refere ao ensino do tema de Análise Combinatória.

Os métodos de recolha de dados a utilizar nesta investigação serão a observação, a entrevista e a análise documental.

Está prevista a realização de várias sessões com a investigadora e as professoras participantes em que serão tratadas a planificação, a partilha de ideias e a reflexão conjunta no âmbito do ensino do tema de Análise Combinatória. Estas sessões serão áudio-gravadas, bem como serão também observadas e áudio-gravadas algumas aulas no âmbito do ensino do tema de Análise Combinatória, que serão objecto de reflexão e análise nas sessões referidas.

Tornar-se-á indispensável, do ponto de vista metodológico, recorrer à entrevista para se tentar perceber, nos discursos e representações dos professores, o significado da concretização ou não das expectativas prévias, das dificuldades sentidas e das mudanças ocorridas, de modo a possibilitar, com maior facilidade, a apreensão da compreensão que os próprios sujeitos fazem acerca dos fenómenos nos quais estão envolvidos e implicados.

As entrevistas serão realizadas segundo um guião orientador, definido previamente, e caracterizam-se por permitirem flexibilidade na ordem das questões e na inclusão de novas questões, no decorrer da entrevista. Nesta investigação, pretende-se realizar entrevistas individuais e em grupo, e serão realizadas antes e depois de concluída a leccionação do tema Análise Combinatória. O registo das entrevistas será efectuado em áudio, procedendo-se, posteriormente, à sua transcrição para suporte informático e de papel.

De forma a viabilizar este projecto de investigação, solicito-lhe autorização para eu e as outras duas professoras, que também participam no projecto, poderem assistir às suas aulas em horário e número a definir nas sessões. Prevejo que a assistência às aulas decorra durante o mês de Outubro.

Quer no processo de recolha de dados, quer no relatório da investigação, comprometo-me a garantir o anonimato em relação à sua identidade e da escola. Comprometo-me ainda, através da colega, a solicitar autorização aos Encarregados de Educação, bem como a comunicar-lhes o dia e a hora em que as aulas serão assistidas e áudio-gravadas.

No caso de vir a ser necessário, será discutida, inicialmente, com a colega integrada no grupo das participantes desta investigação e, posteriormente, com as estruturas da escola e com os Pais/Encarregados de Educação a eventual implementação de aulas extra para não comprometer o cumprimento do programa.

Agradecendo a sua atenção ao pedido formulado, subscrevo-me com os melhores cumprimentos.

3 de Setembro de 2008.

A investigadora

(Bárbara Vilamarim do Alvar de Carvalho)

Quadro – Calendarização das etapas de implementação da investigação

Tempo Actividades	2008/2009											
	SET	OUT	NOV	DEZ	JAN	FEV	MAR	ABR	MAIO	JUN	JUL	AGO
Revisão de Literatura	X	X	X	X	X	X	X	X				
Reuniões de Preparação e Reflexão de Aulas	X	X	X	X								
Elaboração do Guião da Entrevista	X		X									
Realização de Entrevistas	X			X								
Observação de Aulas		X	X									
Análise dos Dados		X	X	X	X	X	X	X				
Redacção da dissertação					X	X	X	X	X	X		

ANEXO II

(Guiões de Entrevista e Questionário ministrado aos alunos)

Guião da entrevista inicial

1- Percurso pessoal e profissional da professora

- Que idade tens?
- Qual é a tua formação académica?
- Quantos anos de serviço tens?
- Que níveis já leccionaste (básico e secundário)? Que anos de escolaridade vais leccionar no presente ano lectivo?
- Que cargos vais desempenhar este ano lectivo que se inicia e que cargos já desempenhaste em anos lectivos anteriores?
- Fazes parte de alguma associação profissional?
- Costumas participar em encontros de professores que visem formação?
- O que te levou a ser professora de Matemática? Foi esta a tua primeira opção profissional? Porquê?
- Como são os alunos desta escola?
- Qual o ambiente desta escola? E do grupo disciplinar? Sentes-te integrada? Porquê?
- Descreve uma experiência significativa como profissional.
- Já participaste em algum projecto ou experiência inovadora? Em que consistia?
- Quais as razões que te levaram a aceites trabalhar neste projecto colaborativo? Antecipas algum problema ou alguma dificuldade? Qual ou quais?
- O que esperas desta experiência?

2- Prática Pedagógica

- Algum professor te marcou no teu percurso como aluna? Sentias-te à vontade para expor as tuas dúvidas na aula? Que tipo de aulas preferias enquanto aluna? Porquê?
- Gostas que os alunos participem na aula? Impões regras?
- Que tipo de perguntas costumas colocar aos teus alunos, durante as aulas? E os alunos, também te colocam? Que tipo de perguntas? Em que situações?
- Quando um aluno tem uma dúvida sobre um determinado conteúdo, o que é que tu fazes?
- Quando um aluno diz uma coisa errada, tentas corrigir de imediato, perguntas ao grupo turma se alguém quer esclarecer o colega, fomentando deste modo a reflexão e a discussão na turma ou tentas propor uma tarefa cuja resolução se direcciona à dificuldade em causa?
- Tens por hábito reflectir, na aula e após a aula sobre as dificuldades que os alunos apresentam? Já alguma vez planificaste uma aula tendo como base dúvidas e erros colocados pelos alunos nas aulas, ou em resposta a questões que demonstraram fracos resultados por parte dos alunos, num teste?
- Que tarefas propões habitualmente aos alunos? Porquê?

- Quando preparas as aulas, o que tens em conta na selecção das tarefas?
- Quais são os recursos que utilizas?
- Usas material manipulável nas tuas aulas?
- Dá um exemplo duma aula que realizaste e que achas que tenha resultado bem, e de uma que correu mal. Porquê?

3- Ensino e aprendizagem da Combinatória

- Quantos anos ensinaste o tema “Análise Combinatória”? Gostas de ensinar este tema?
- Como aluna, em que anos de escolaridade estudaste a Combinatória (ensino secundário e universitário)? Recordas-te dos conteúdos aí estudados?
- Sentiste dificuldades na aprendizagem deste tema? Em que nível de ensino?
- Lembras-te como os teus professores ensinaram este tema? Gostarias que tivesse sido de uma maneira diferente? Que materiais foram usados no ensino?
- E tu, achas difícil ensinar a Combinatória? Porquê?
- Para que serve a Combinatória?
- Qual pensas ser a melhor forma para leccionar a Combinatória? Que aspectos valorizas mais nesta temática?
- Porque é que os alunos sentem dificuldades neste tema?
- Já alguma vez sentiste, durante uma aula, que não sabias como resolver um problema emergente? Como geriste a situação?
- Na tua opinião, como é que os alunos aprendem a Combinatória? Como é que os alunos devem estudar este tema? O que é um bom aluno em Combinatória?
- Tens formação contínua sobre o tema? Se sim, achas que te foi útil para a preparação das tuas aulas?

4- Trabalho Colaborativo

- Gostas mais de trabalhar individualmente ou com outros colegas?
- Consideras importante o papel atribuído ao grupo disciplinar? Costumas trabalhar colaborativamente com alguns professores do grupo ou fora do grupo? Que tipo de trabalho desenvolvem? Como avaliaste a tua participação? Como avaliaste o resultado final após essa experiência?
- Como ultrapassas dificuldades e constrangimentos que aparecem no decorrer do trabalho, quer a nível da planificação das aulas quer da sua implementação? Com os colegas do grupo? Procuras informações nos livros? Outras?

Guião da entrevista final

1- Prática Pedagógica

- Relativamente à planificação das aulas que fizemos em equipa, achas que mudaste os teus hábitos de trabalho para te adaptares ao grupo? Quais e porquê?
- Consideras que, de alguma forma, mudaste os teus métodos de ensino da Combinatória em relação aos anos anteriores? Quais e de que forma?
- Sentiste dificuldades em te adaptar ao tipo de planificação que desenvolvemos em grupo e ao tipo de aulas que implementaste? Como superaste essas dificuldades? Achas que valeu a pena ou vais abandonar ideias que emergiram no grupo da próxima vez que leccionares este conteúdo?
- Pensas que a opção que fizemos em grupo – ao planificarmos as aulas para leccionarmos a Combinatória – foi a melhor? Que aspectos valorizamos mais nesta temática?
- Nomeadamente, consideraste importante conhecer as estratégias informais que os alunos possuem, antes de lhes ensinares as operações combinatórias?
- Apreendeste alguma coisa com os alunos?
- Neste momento, que tipo de aulas gostas mais de leccionar no tema de Combinatória? Apresenta uma aula de que tenhas gostado e explica as razões.
- Relativamente às tarefas, neste momento, qual o tipo que valorizas mais? Descreve tarefas que devem ser propostas aos alunos quando ensinamos a Combinatória.
- Achas que foi interessante usar na nossa prática tarefas diferentes, nomeadamente propor aos alunos a resolução de problemas que não foram tirados de manuais ou de Exames Nacionais? Porquê?
- Qual foi a tua maior dificuldade em gerir uma aula em que implementaste tarefas abertas?
- E a organização da aula: achas que os alunos devem resolver as tarefas em grupo, em pares ou individualmente?
- E os alunos, de que aulas gostam mais? daquelas em que eles são os “protagonistas” ou daquelas em que são “actores passivos”?
- Achaste que perdeste tempo quando pediste aos alunos para explicarem os seus processos de resolver os problemas, confrontando-os com outros?
- Preferes falar menos nas aulas e ouvires mais os alunos, ou vice-versa? Como descreves as aulas que ministraste?
- O que sentiste quando ouviste a gravação de uma tua aula? E quando leste uma transcrição? Ficaste surpreendida com algum facto? Descreve.
- Deparaste com algum episódio em que os alunos te surpreenderam? Nomeia alguns.
- Os alunos sentiram dificuldades neste tema? Porquê? O que achas que falhou este ano?
- Notaste que os alunos mais fracos se evidenciaram, nem que fosse na participação? Explica porquê.

- Na primeira entrevista quis saber a tua opinião acerca de como os alunos aprendem a Combinatória e de como os alunos devem estudar este tema. Modificaste, de alguma forma, a tua opinião?
- Que opinião tens, hoje, no que concerne ao uso de modelos na resolução de problemas combinatórios? Achas infantil o uso de modelos físicos numa aula de 12.º ano? O que pensas acerca disso?
- Qual é a tua opinião, neste momento, acerca do ensino da Combinatória em níveis mais baixos, nomeadamente no ensino básico, no 10.º ou 11.º anos?
- Na tua opinião, este trabalho proporcionou-te novos conhecimentos sobre didáctica? Tais conhecimentos já te tinham preocupado e interessado como professora? Já tinhas discutido esta questão com outros professores? Explica porquê.
- Neste momento, o que é a Combinatória?
- Para que serve a Combinatória? Exemplifica.

2- Trabalho Colaborativo

- O que significou, para ti, a tua participação na planificação das aulas, na elaboração das tarefas e na reflexão sobre as aulas implementadas?
- Durante este trabalho sentiste-te apoiada pelo grupo e menos isolada para enfrentares as dificuldades que emergiram no decorrer da tua acção docente? Consideras que esta forma de trabalhar contribuiu para aumentar a tua confiança relativamente a este conteúdo?
- Tens presente, neste momento, algum episódio que se tenha salientado nas reuniões de planificação, na tua prática lectiva ou da colega ou nas sessões de reflexão sobre a prática? Se sim, descreve-o.
- Qual foi o impacto do trabalho em grupo nas tuas práticas, nas tuas concepções sobre a combinatória e no seu ensino?
- Este trabalho desenvolvido pelas três professoras (inicialmente por quatro) contribuiu para o aprofundamento do teu conhecimento acerca do tema de Combinatória e, consequentemente, para o teu desenvolvimento profissional? Em que medida?
- Depois do teu estágio pedagógico, já tinhas assistido a aulas de colegas ou foi a primeira vez? Que sentimentos despertaram em ti quando observaste a colega a implementar aulas sobre o mesmo assunto que tu própria leccionaste ou leccionarás?
- Consideras que foi uma mais valia assistir a aulas de uma colega? E assistirem às tuas?
- Ao observar as aulas da tua colega pensaste alguma vez que as estratégias que ela usava funcionavam melhor ou pior do que as tuas? Tiveste a tentação de comparar com a tua maneira de o fazeres? Serviu para reflectires em casa e mesmo no momento acerca do teu desempenho?
- Consideras que quando leccionares o mesmo assunto vais ter em consideração a apropriação que fizeste da aula da tua colega, no sentido de alterar alguma estratégia?

- Foi interessante e pertinente ouvires a opinião de uma colega acerca do decorrer da tua aula? Achas que aprendeste e que poderás modificar qualquer postura adoptada? Especifica.
- Este trabalho ajudou-te a tomares consciência das tuas limitações e também de que podemos ser úteis aos outros?
- Neste momento, achas que valeu a pena esta experiência? Porquê?
- Gostavas de continuar este trabalho, nos mesmos moldes? O que mudarias?
- Aponta algumas dificuldades ou constrangimentos sentidos ao longo deste trabalho.

QUESTIONÁRIO MINISTRADO AOS ALUNOS

PARTE 1

Em cada afirmação assinala com uma cruz o quadrado (☒) que corresponde ao teu grau de concordância, considerando a seguinte escala:

DT – Discordo Totalmente

D – Discordo

I – Indiferente

C – Concordo

CT – Concordo Totalmente

Afirmações	DT	D	I	C	CT
1. A Combinatória é um tema mais difícil do que os outros temas de Matemática.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
2. Globalmente, gostei da forma como a Combinatória foi apresentada nas aulas.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
3. Os problemas propostos despertaram o meu interesse pela Combinatória.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
4. Descobrir por nós próprios a matemática é mais aliciante do que ser o professor a apresentá-la.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
5. Aprendo melhor quando tenho de pensar por mim próprio do que quando o professor pensa por mim.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
6. Trabalhar individualmente foi importante para aprender melhor.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
7. Trabalhar em grupo foi importante para aprender melhor.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
8. Participei activamente nas actividades realizadas.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
9. Conseguia resolver mais problemas quando estava a estudar fora da escola do que na sala de aula.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
10. No futuro gostaria de aprender outros temas de matemática do mesmo modo que aprendi a Combinatória.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

PARTE 2

Nas questões seguintes apresenta respostas tão completas e claras quanto possível.

- 1.** Notaste diferenças no ensino da Combinatória em relação ao ensino de outros temas de Matemática? ☐ Sim ☐ Não

Se respondeste Sim, indica as diferenças:

- 2.** A resolução do teste antes de aprenderes Combinatória facilitou a tua aprendizagem das operações combinatórias? Porquê?

- 3.** O facto de a professora e os teus colegas valorizarem os processos de resolução que usaste ajudou-te a aprender os novos conceitos de Combinatória? Porquê?

- 4.** Quais os aspectos positivos que mais se salientaram para ti no estudo da Combinatória?

- 5.** Quais os aspectos negativos que mais se salientaram para ti no estudo da Combinatória?

Muito obrigada pela tua colaboração.

ANEXO III

(Guiões de aulas e Fichas de Trabalho)

Guião de Aula 1

1.ª Parte

PROBLEMA

Se tivermos dentro de um saco vários papelinhos escritos com o mês de aniversário de cada aluno, quantos papelinhos temos de tirar para termos a garantia de que pelo menos dois alunos tenham nascido no mesmo mês.

Questões a colocar:

- Pedir aos alunos para descreverem várias extracções possíveis (por exemplo, os meses de aniversário relativos a 5 alunos, a 10 alunos, a 12 alunos, a 15 alunos, etc.).
- Pense na hipótese de todos os alunos extraídos terem o seu aniversário em meses diferentes. Nesse caso, o que acontece aos aniversários de 12 alunos? E de 13 alunos? E de mais de 13 alunos?
- Então o que significam as nossas 13 extracções?
- Queremos agora encontrar *três* alunos que partilham o mesmo mês de aniversário. Quantos alunos temos de ter para garantir o aniversário de três no mesmo mês?
- Registar o resultado na tabela:

N.º de pessoas com o mesmo mês de aniversário	N.º de extracções requerido
2	
3	

Depois de inserir os dados na tabela anterior, dividir os alunos em grupos, não maiores de 4 elementos, dar-lhes um cartão de ovos, alguns feijões e uma calculadora (para os que gostam de conjecturar) e pedir-lhes para preencher as próximas linhas da tabela. Solicitar os alunos a verbalizarem quaisquer regularidades ou padrões que vejam nos dados.

N.º de pessoas com o mesmo mês de aniversário	N.º de extracções requerido
2	
3	
4	
5	
6	

- Que procedimento temos de usar para resolver o problema em cada caso?
- Quantos alunos temos de ter para garantir que pelo menos n tenham nascido no mesmo mês?

Logo que os alunos expressem verbalmente esta relação, verificar se eles compreenderam o conceito modificando o problema da seguinte forma:

Verifica se compreendeste:

1. Se tivermos dentro de um saco vários papelinhos escritos com o dia da semana em que cada aluno nasceu, quantos papelinhos temos de tirar para termos a garantia de que pelo menos dois alunos nasceram no mesmo dia da semana?
2. Uma gaveta contém meias pretas, castanhas, azuis e cinzentas, não combinadas. Se eu escolho no escuro, quantas meias tenho de tirar até ter a certeza que tenho um par combinado?
3. Quantas palavras tenho que escolher do nosso livro de Matemática para ter a certeza que três começam com a mesma letra?
4. Se a minha colecção de *Compact Disks* consiste em oito Abba e cinco Camp Rock, quantos CDs tenho de seleccionar para ter dois do mesmo grupo?
5. Um saco contém euros, dracmas, rublos e pesetas. Quantas moedas tenho de seleccionar para ter a certeza que tenho quatro do mesmo país?

[Retirado de: Spangler, D. A. (1991). The Pigeonhole Principle: A Counting Technique for the Middle Grades. M. J. Kenney & C. R. Hirsch (Eds.), *Discrete Mathematics across the curriculum, K-12* (pp. 55-58). Reston, VA: National Council of teachers of Mathematics.]

2.ªParte

Tarefa introdutória:

A Ana tem 3 blusas (B1, B2 e B3) e 2 saias (S1 e S2). De quantas maneiras diferentes se pode ela vestir, combinando uma blusa e uma saia?

Resolução: Chamar às blusas B1, B2, B3, e chame às saias S1 e S2. Então os alunos podem usar a estratégia de resolver problemas, listando todas as possibilidades para chegarem ao seguinte lista de conjuntos (combinações de vestuário)

B1 – S1 B2 – S2 B3 – S1
B1 – S2 B2 – S2 B3 – S2

A lista mostra 3 grupos de duas combinações cada. (*Independentemente da ordem que os alunos sugiram para estas combinações, escreva-as no quadro ou no projector e num arranjo, como o de cima. Que sugere 3 grupos de 2*). Assim, a Ana pode fazer 6 combinações diferentes.

Resolução alternativa. Alguns alunos podem achar mais significativa a representação gráfica da lista. Na figura 8.1, cada ramo do diagrama em árvore representa uma combinação. Assim como na listagem acima, há 3 conjuntos de dois ramos cada.

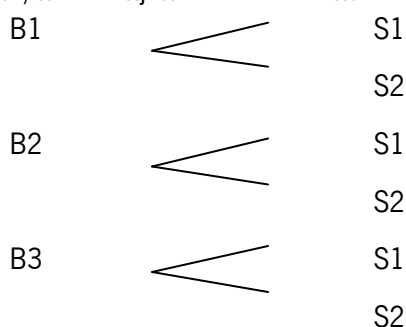


Fig. 8.1

[Retirado de: DeGuire L. J. (1991). Permutations and Combinations: A problem- solving Approach for Middle School Students. C. R. Hirsch & M. J. Kenney (Eds.), *Discrete Mathematics across the curriculum, k-12* (pp. 59-66). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.]

Aproveitar o problema para fazer o produto cartesiano de B e S.

Designemos o conjunto das blusas por $B = \{ B1, B2, B3 \}$ e o conjunto das saias por $S = \{ S1, S2 \}$. Uma toilette consiste em vestir uma blusa e uma saia ou seja podemos considerar um par (B_i, S_j) formado por um elemento do 1.º conjunto e por um elemento do 2.º conjunto. Uma toilette constitui assim um elemento do produto cartesiano de B e S, ou seja do conjunto

$$B \times S = \{(B1, S1), (B1, S2), (B2, S1), (B2, S2), (B3, S1), (B3, S2)\}$$

O qual tem 6 elementos, ou seja $\# B \times S = \# B \times \# S$

Os alunos necessitam de mais exemplos deste tipo de situações de problemas, incluindo aqueles que estendem a lista do diagrama em árvore para incluírem três escolhas. Resolver a primeira tarefa de desenvolvimento.

Tarefas de desenvolvimento

3. Uma organização nacional quer dar a cada um dos seus membros um código de identificação (ID). Para tal, resolve utilizar um código de quatro caracteres, começando com uma letra (não incluir a letra O para que não haja confusão com o dígito zero) e continuando com três dígitos. A Organização tem 32 000 membros. Será que vão ser capazes de atribuir a cada membro um código ID diferente?

Resolução: Há 4 ranhuras para preencher aqui. A primeira ranhura (a letra) tem 25 escolhas e cada uma das outras ranhuras tem 10 escolhas (i.e., os dígitos de 0 a 9). Então o número possível de códigos de identificação (ID) é $25 \times 10 \times 10 \times 10$, ou 25 000. Uma vez que a organização tem 32 000 membros, não terão códigos de identificação distintos para todos. Precisam de verificar o seu plano e adicionar uma nova letra ou um outro dígito ou substituir um dos dígitos por uma letra. *(A questão de o número de possibilidades ser suficiente para satisfazer a condição ou ser mais do que necessária dá a oportunidade de trazer a resolução de problemas para o contacto com a vida real. Peça aos alunos para modificar o plano proposto – por exemplo, o código de identificação (ID) – para ser mais realista e para avaliarem as modificações propostas. Por exemplo, neste problema, as propostas de adicionar outra letra ou outro dígito gerarão 625 000 e 250 000 códigos diferentes (ID), respectivamente, cada com cinco caracteres. A terceira proposta (substituir um dos dígitos por uma letra) gerarão 62 500 códigos de ID, cada com quatro caracteres. A não ser que a organização tenha em mente duplicar os seus membros num futuro próximo, a última modificação requereria menos espaço de memória no computador e uma escrita mais breve para cada código de membro. Assim, este código seria mais eficiente em termos de custo do que as outras duas propostas. Contudo, se se antecipa um aumento do número de membros, o tornar a atribuir, o tornar a escrever e o reprogramar os computadores por causa do carácter extra levaria muito tempo e custaria muito dinheiro. Nesta situação, deveria ser considerada uma das outras propostas. Pode assim, ser considerada uma variedade de parâmetros na discussão).*

[Retirados de: DeGuire L. J. (1991). Permutations and Combinations: A problem-solving Approach for Middle School Students. C. R. Hirsch & M. J. Kenney (Eds.), *Discrete Mathematics across the curriculum, K-12* (pp. 59-66). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.]

Guião de Aula 2

Operação combinatória: Arranjos com repetição

Tarefas introdutórias

- Análise dos itens 2.a) e 2.b) do Teste. Discussão dos processos de resolução/estratégias utilizadas.
- Exercícios propostos:
 - 1) A Inês vai lançar um rapa (R; T; D; P) duas vezes consecutivas. Quantos são os resultados possíveis?
 - 2) O João Hardware decidiu criar um código de acesso ao seu cacifo. O código é uma sequência de 3 letras e dois dígitos. Quantos códigos consegue formar?
Nota: Considera o alfabeto com 26 letras.
- Análise do 2.d) e 2.c) do teste.

Tarefas de desenvolvimento

- Resolução da ficha de trabalho 2.
- Generalização.
- Definição.
- Exercícios do manual.

Guião de Aula 3

Operação combinatória: Arranjos simples

Tarefas introdutórias

- Entregar, novamente, aos alunos do enunciado da terceira questão do teste para que estes resolvam na aula. Discussão no grupo turma sobre as estratégias usadas para a resolução das questões 3.a) e 3.b).

Tarefas de desenvolvimento

- Resolver o exercício 10 da p.116 do manual adoptado
- Resolução do problema 1., 6., 7., 8. e 9 da Ficha 3

Guião de Aula 4

Operação combinatória: Permutações

Tarefas introdutórias

- Entregar, aos alunos o enunciado da primeira questão do teste para que estes resolvam novamente na aula. Discussão no grupo turma sobre as estratégias usadas para a resolução das questões 1.a), 1.b) e 1.c).

Tarefas de desenvolvimento

- Resolução de problemas Ficha 4

Guião de Aula 5

Operação combinatória: Combinações

Tarefas introdutórias:

Distribuir por cada aluno a resolução que cada um fez, no início do ano, da questão 4, do teste.

- Análise dos itens 4.a) e 4.b) do Teste. Colocar no quadro várias estratégias usadas pelos alunos. Discussão dos processos de resolução/ estratégias utilizadas.
- Análise do 4.d) e 4.c) do teste.
- Generalização.

Tarefas de desenvolvimento :

- Resolução do problema 13 da ficha 5.
- Permutações com repetição.
- Exercícios propostos:
 - Com as letras da palavra “MATEMATICA” quantas palavras com ou sem significado é possível formar?
 - Quantas sequências diferentes posso construir com os números 6 1 1 2 3 4 5 6 6.
- Exercícios do manual.

Guião de Aula 6

Tarefas introdutórias

- Resolução e reflexão acerca da “proposta de trabalho” sobre indução matemática, da p.69 do manual “Espaço 12”.

Tarefas de desenvolvimento

- Resolução de problemas das Fichas, do manual, e do caderno de actividades.

FICHA DE TRABALHO 1

Tarefa introdutória

A Ana tem três blusas (B1, B2 e B3) e duas saias (S1 e S2). De quantas maneiras diferentes se pode ela vestir, combinando uma blusa e uma saia?

Qual o vosso palpite para o número total de possibilidades? _____

[Retirado de: DeGuire L. J. (1991). Permutations and Combinations: A problem- solving Approach for Middle School Students. C. R. Hirsch & M. J. Kenney (Eds.), *Discrete Mathematics across the curriculum, k-12* (pp. 59-66). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.]

Tarefas de desenvolvimento

1. Um teste tem um certo número de questões do tipo verdadeiro/falso, em que a resposta é assinalada por V no caso de ser Verdadeira e por F no caso de ser Falsa.

Quantas hipóteses de resposta há, se o teste tem:

- a) Três questões do tipo verdadeiro/falso?
- b) Quatro questões do tipo verdadeiro/falso?
- c) Vinte questões do tipo verdadeiro/falso?

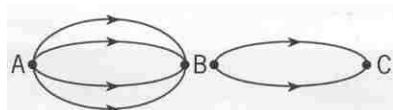
2. Na nossa escola, este ano lectivo, há 6 turmas de Ciências e Tecnologias no 12.º ano: as turmas A e F têm 25 alunos, a B tem 28 alunos, a C tem 24 alunos, a D tem 27 e a E tem 26 alunos. De quantas maneiras podem ser escolhidos 6 alunos, sendo um de cada turma?

3. Uma organização nacional quer dar a cada um dos seus membros um código de identificação (ID). Para tal, resolve utilizar um código de quatro caracteres, começando com uma letra (não incluir a letra O para que não haja confusão com o dígito zero) e continuando com três dígitos. A Organização tem 32 000 membros. Será que vão ser capazes de atribuir a cada membro um código ID diferente?

(Considera o alfabeto com 26 letras)

[Retirado de: DeGuire L. J. (1991). Permutations and Combinations: A problem- solving Approach for Middle School Students. C. R. Hirsch & M. J. Kenney (Eds.), *Discrete Mathematics across the curriculum, k-12* (pp. 59-66). Reston, VA: National Council of teachers of Mathematics.]

4. Os percursos



A Ana está no local A e pretende ir para C, mas para tal tem de passar pelo local B e há quatro percursos alternativos de A para B e de B para C há dois percursos alternativos.

Quantos percursos diferentes pode a Ana escolher?

[Retirado de: Neves, M.A., & Farias, M.L. (1999). *Exercícios, Matemática 12.º ano — 1.ª parte*. Porto: Porto Editora.]

- 5.** Suponhamos que estamos a planear uma viagem e podemos escolher entre o transporte por autocarro ou por comboio. Se existirem três rodovias e dois caminhos-de-ferro, quantos caminhos disponíveis existem para fazer a viagem?

[Retirado de: Meyer, P. L. (1983). *Probabilidade: Aplicação à estatística* (2.ª ed.). Rio de Janeiro: Livros Técnicos e Científicos.]

- 6.** Considerar 12 pontos, 8 sobre uma recta e 4 sobre outra recta estritamente paralela à primeira. De quantas maneiras podemos traçar segmentos de recta com uma extremidade numa recta e a outra extremidade na outra recta?

FICHA DE TRABALHO 2

1. Numa caixa há quatro berlindes numerados (com os dígitos 2, 4, 7, 9). Escolhemos um dos berlindes e registamos o seu número. Pomo-lo de volta na caixa. Repetimos o processo até que formemos um dígito de três números. Quantos números diferentes de três dígitos são possíveis obter? Por exemplo, podíamos obter o número 222.
2. Quatro crianças: Alice, Berta, Carol e Diana vão passar a noite a casa da avó delas. Ela tem dois quartos diferentes disponíveis (um no rés-do-chão e outro no andar de cima) nos quais ela pode colocar algumas ou todas as crianças para dormir. De quantas formas diferentes é que a avó pode colocar as crianças a dormir? (Ela pode usar só um quarto para colocar as crianças, ou ela pode colocar a Alice, a Berta, a Carol no rés-do-chão e a Diana no quarto de cima.
3. Um rapaz tem quatro carros de cores diferentes (preto, laranja, branco e cinza) e decide distribuir os carros pelos seus amigos Peggy, John e Linda. De quantas formas diferentes é que ele pode distribuir os carros? Por exemplo, ele podia dar todos os carros à Linda.

[Retirados de: Batanero, C., Navarro-Pelayo, V. & Godino, J. D. (1997). Effect of the implicit combinatorial model reasoning in secondary school pupils. *Educational Studies in Mathematics*, 32(2), 181-199.]

4. A Joana foi à feira do livro e viu cinco livros que gostaria de comprar. Se a Joana comprar pelo menos um dos cinco livros, de quantas maneiras pode fazer a escolha?
5. De quantas formas diferentes é possível colocar sete bolas todas diferentes em duas caixas também diferentes se, em cada caixa, tiver de ficar pelo menos uma bola?
6. Com os algarismos 0,1,2,3,4,e 5, quantos números de quatro algarismos diferentes, superiores a 3000, se podem escrever?
7. Considera os números ímpares de 4 algarismos que é possível escrever com os símbolos 1, 2, 3, 4, 5 e 6.
 - a) Quantos números se podem escrever?
 - b) Quantos desses números são múltiplos de 5?
 - c) Quantos números são maiores que 3000 e menores do que 4500?
8. Um código é constituído por uma sequência de duas vogais, seguida de quatro algarismos. Quantos códigos são possíveis formar?

[Retirados de: Neves, M.A., Guerreiro, L. & Moura, A. (2005). Probabilidades *Matemática A 12.º ano*. Porto: Porto Editora.]

FICHA DE TRABALHO 3

1. O Presidente da Câmara duma cidade vai visitar sete das vinte escolas do concelho. De quantas formas pode organizar a visita?
2. Dado um comité de três membros (presidente, tesoureiro, secretário) e 4 candidatos: (Artur, Bento, Carlos e David), quantos comités diferentes podem ser seleccionados?
3. A garagem do edifício do Angélico tem cinco lugares marcados. Como o edifício é muito novo, de momento só há três residentes para estacionarem os carros na garagem: o Angélico, a Beatriz e a Cármen. Aqui está um plano da garagem: 1 2 3 4 5. Por exemplo: O Angélico poderia estacionar o seu carro no lugar 1, a Beatriz no 2 e a Cármen no 4. De quantas formas diferentes podem estes residentes estacionar os seus carros?

[2. 3. Adaptados e retirados de: Batanero, C., Navarro-Pelayo, V. & Godino, J. D. (1997). Combinatorial reasoning and its assessment. In I. Gal & J. B. Garfield (Eds.), *The assessment challenge in statistics education* (pp. 239-252). Amsterdam: ISO Press.]

4. Uma caixa contém 8 bolas numeradas de 1 a 8. De quantas maneiras diferentes podemos extrair:
 - a) Quatro bolas com reposição?
 - b) Cinco bolas sem reposição?
5. Uma caixa A possui 4 bilhetes diferentes e uma caixa B possui 3 bilhetes diferentes. Calcula o número de possibilidades quando se retira, sem reposição:
 - a) Dois bilhetes sucessivamente de A e depois também sucessivamente de B.
 - b) Três bilhetes sucessivamente de A e depois dois de B.
6. Um jogador de golf tem um expositor com 11 lugares para colocar as suas medalhas. Ele tem 14 medalhas diferentes para colocar sendo 8 recebidas em torneios nacionais e 6 em torneios estrangeiros. De quantas formas diferentes podem ser colocadas as medalhas:
 - a) Sem qualquer restrição?
 - b) Se os primeiros seis lugares são ocupados por medalhas nacionais e os restantes por medalhas estrangeiras?
7. Houve um atropelamento e o motorista fugiu.
Ouvidas as testemunhas, chegou-se às seguintes conclusões:
 - A parte literal da matrícula é formada por uma vogal seguida de uma consoante;
 - A parte numérica consta de quatro algarismos diferentes, é um número ímpar e o 3.º algarismo é zero.Quantas são as matrículas suspeitas?

[6. e 7. Retirados de: Santos, M.A., & Marques, M.E. (1999). *Exercícios Resolvidos de Matemática 12.º ano — 1.ª volume*. Porto: Porto Editora.]

8. Considera todos os números de cinco algarismos diferentes. Quantos desses números são pares?

- Uma resposta correcta é $8 \times {}^8A_3 \times 4 \times {}^9A_4$.

Numa pequena composição, explica porquê.

- 9.** Tem-se um tabuleiro quadrado como mostra a figura e cinco botões de cores diferentes (vermelho, amarelo, preto, castanho e rosa). O jogo consiste em distribuir os cinco botões por cinco casas diferentes.

a) Quantas disposições há dos cinco botões?

b) Quantas posições são possíveis com:

- uma das linhas totalmente preenchidas.
- um único botão, o amarelo, ficar numa linha.
- três botões apenas sobre a mesma diagonal.

FICHA DE TRABALHO 4

1. Vai haver uma eleição na turma para Delegado de Turma. Há quatro nomes em disputa – Jim, Karen, Linda e Michael. De quantas formas podem os nomes ser alistados no boletim eleitoral?
2. Sem repetir letras, quantas palavras diferentes (com ou sem sentido) se pode escrever com todas as letras da palavra *workmanship*?
3. De quantas formas diferentes se podem formar palavras com ou sem sentido usando as letras da palavra *purchase* se cada palavra tem que começar por uma consoante e terminar com uma vogal?

[Adaptados e retirados de: DeGuire L. J. (1991). Permutations and Combinations: A problem- solving Approach for Middle School Students. C. R. Hirsch & M. J. Kenney (Eds.), *Discrete Mathematics across the curriculum, k-12* (pp. 59-66). Reston, VA: National Council of teachers of Mathematics.]

a) Três alunos, a Ana, a Beatriz e o Carlos foram mandados ao Conselho Executivo por copiarem. Têm que alinhar-se numa fila, fora da sala do Conselho Executivo, e esperar pela sua vez. Claro que nenhum quer ser o primeiro. De quantas maneiras diferentes se podem dispor em fila os **três** alunos? *Exemplo:* Ana, Beatriz, Carlos (A, B, C).

Qual o teu palpite para o número total de possibilidades?

b) Juntaram-se aos alunos anteriores mais dois alunos, o David e o Eduardo. De quantas maneiras diferentes se podem dispor em fila os **cinco** alunos?

Qual o teu palpite para o número total de possibilidades?

c) E se tivermos n alunos, de quantas maneiras diferentes os podemos dispor em fila?

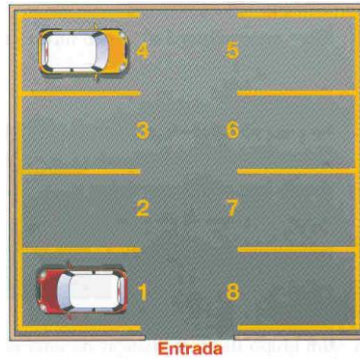
5. Numa urna há três berlines numerados com os dígitos 2, 4 e 7. Extraímos um berline e registámos o seu número. Sem recolarmos o berline, extraímos outro e registámos o seu número. Finalmente, extraímos outro e registámos o seu número. Quantos números de três dígitos se podem obter com este método? Por exemplo, podíamos obter o número 724.

[Adaptados e retirados de: Batanero, C., Navarro-Pelayo, V. & Godino, J. D. (1997). Combinatorial reasoning and its assessment. In I. Gal & J. B. Garfield (Eds.), *The assessment challenge in statistics education* (pp. 239-252). Amsterdam: ISO Press.]

6. Na altura das matriculas, pediu-se aos 180 alunos do 12º ano, que colocassem, por ordem de preferência, as cinco disciplinas de opção. Quando os professores foram organizar as turmas, um deles teve o seguinte desabado: “Apre! Não há dois alunos com a mesma lista de preferências.” Será isso possível? Justifica a tua resposta.

[Adaptado de Gomes, F. & Viegas, C. (2005). XEQMAT, Matemática 12.º ano-volume1. Lisboa: Texto Editora.]

6. Para colocar numa prateleira tem-se 3 livros de Português, 3 de Matemática e 2 de Biologia. De quantas maneiras diferentes é possível colocar os livros ficando juntos os livros de Matemática numa das pontas da prateleira?
7. A garagem de um prédio tem oito lugares numerados de 1 a 8, correspondendo um a cada apartamento do prédio e estão dispostos como a figura ilustra.



8.a) O Sr. Alves e o Sr. Bessa são moradores desse prédio e, num certo dia, entram na garagem para estacionar quando esta se encontra vazia. Admite que não existem lugares reservados.

- De quantas maneiras podem estacionar os dois vizinhos?
- Quantas possibilidades há para os dois vizinhos estacionarem em lugares situados frente a frente? E lado a lado?
- O Sr. Alves só estaciona em lugares pares e o Sr. Bessa apenas estaciona em lugares ímpares. De quantas maneiras podem estacionar nestas condições?

b) O Sr. Alves, o Sr. Bessa e o Sr. Costa foram os primeiros moradores e, como tal, decidiram sortear entre si lugares de garagem para se tornarem fixos. Sabe-se que os lugares sorteados ficam do mesmo lado da entrada. Quantos são os resultados possíveis?

[Retirado de: Costa, B. & Viegas, C.(2008). *Tudo Pró_Exame Matemática A Espaço Prático 12.º ano, Matemática 12.ºano*. Porto: Edições Asa.]

9. Colocam-se quatro rapazes em fila ao acaso. De quantas maneiras diferentes podem ficar os rapazes todos seguidos e as raparigas também todas seguidas.

- Uma resposta correcta é $4! 6! \times 2$

Numa pequena composição, explica porquê.

FICHA DE TRABALHO 5

1. Cinco alunos: Elisabete, Fernando, Guilherme, Lucy e Maria ofereceram-se para ajudarem a professora a limpar o quadro. De quantas formas é que a professora pode seleccionar três dos cinco alunos? Por exemplo, ela poderia seleccionar a Elisabete, a Maria e o Guilherme.
2. A Maria e a Cindy têm quatro selos numerados de 1 a 4. Elas decidem partilhar os seus selos, dois para cada uma. De quantas formas diferentes podem elas partilhar os seus selos? Por exemplo, a Maria poderia ficar com os selos numerados 1 e 2 e a Cindy com os selos 3 e 4.
3. Supõe que temos três cartas iguais e que queremos colocá-las em quatro envelopes coloridos diferentes: amarelo, azul, vermelho e verde. De quantas formas podem as cartas idênticas ser distribuídas pelos quatro envelopes? Por exemplo, podíamos introduzir uma carta num envelope amarelo, outra num azul e a última num verde.

[Retirados de: Batanero, C., Navarro-Pelayo, V. & Godino, J. D. (1997). Effect of the implicit combinatorial model reasoning in secondary school pupils. *Educational Studies in Mathematics*, 32(2), 181-199.]

4. Supõe que uma lotaria especial requer que os compradores escolham dois bilhetes cada um identificado com a sua letra, que serão escolhidos entre quatro bilhetes cada um identificado com uma das letras: A, B, C, D. De quantas formas pode o comprador escolher as duas letras?
5. Supõe que uma lotaria especial requer que os compradores escolham 3 bilhetes cada um identificado com a sua letra, que serão escolhidos entre quatro bilhetes cada um identificado com uma das letras : A, B, C, D. De quantas formas pode o comprador escolher as três letras?

[Retirado de: DeGuire L. J. (1991). Permutations and Combinations: A problem-solving Approach for Middle School Students. C. R. Hirsch & M. J. Kenney (Eds.), *Discrete Mathematics across the curriculum, K-12* (pp. 59-66). Reston, VA: National Council of teachers of Mathematics.]

6. A partir de um grupo de 10 pessoas, pretende-se constituir comissões com um certo número de elementos, sem diferenciação de cargos e podendo a mesma pessoa pertencer a comissões diferentes. Em qual dos casos temos um número maior de comissões, se
 - (a) Cada comissão é formada por 2 elementos.
 - (b) Cada comissão é formada por 5 elementos.
 - (c) Cada comissão é formada por 8 elementos.

Explica o raciocínio que te conduziu à resposta dada.

[Retirado de: Fernandes, J. A. (1990). *Concepções erradas na aprendizagem de conceitos probabilísticos*. Dissertação de Mestrado não publicada, Universidade do Minho, Braga.]

7. No clube desportivo “Ás da bola” decidiu-se reorganizar a direcção definindo os seguintes cargos: O presidente, vice presidente, secretário, tesoureiro e vogal. Sabe-se

que 12 dos sócios (3 mulheres e 9 homens) mostraram-se disponíveis para integrar a nova direcção.

- a) Quantas direcções distintas se pode organizar?
- b) Sabe-se que o secretário e o vogal são os únicos elementos femininos na direcção. Quantas direcções distintas existem nestas condições?
- c) Se o João for presidente e o vice presidente for uma mulher, quantas direcções distintas podemos formar?
- d) Se o João for presidente, vice presidente ou secretário, sabe-se que quatro dos restantes sócios não querem pertencer à direcção. Quantas direcções diferentes temos nestas condições?

8. A dona Joana tem 6 copos diferentes e seis chávenas diferentes que pretende colocar num armário com 12 prateleiras podendo em cada uma colocar seis objectos.

- a) De quantas formas diferentes os pode colocar?
- b) De quantas formas diferentes pode colocar os 12 objectos se:
 - Ficarem separados os copos das chávenas.
 - O copo rosa ficar junto da chávena vermelha.
 - O copo azul e o copo vermelho ficarem um atrás do outro.

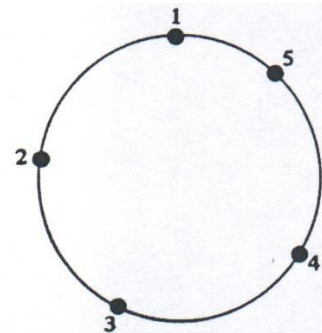
9. O Nuno quer ir ter com a sua namorada, Ana. De quantas maneiras diferentes o pode fazer, nunca andando par trás?

						A
	N					

FICHA DE TRABALHO 6

1. Quatro crianças: Alice, Berta, Carol e Diana vão passar a noite a casa da avó delas. Ela tem dois quartos diferentes disponíveis (um no rés-do-chão e outro no andar de cima) nos quais ela pode colocar algumas ou todas as crianças para dormir. De quantas formas diferentes é que a avó pode colocar as crianças a dormir? (Ela pode usar só um quarto para colocar as crianças, ou ela pode colocar a Alice, a Berta, a Carol no rés-do-chão e a Diana no quarto de cima).
2. A Ana tem 6 esferográficas e pode escolher as que quiser para levar para a escola. Sabendo que pretende levar pelo menos 2 das 6 esferográficas, de quantas maneiras diferentes o pode fazer?
3. Marcar 5 pontos sobre um círculo, sendo quaisquer deles três não colineares.

- a) Quantos segmentos se podem definir com estes pontos?
- b) Quantos triângulos se podem definir, sendo os seus vértices pontos marcados?
- c) E quantos quadriláteros? E pentágonos?



[2. e 3. Retirados de: Glaymann, R. J. & Varga, T. (1973). *Les probabilités à l'école*. Paris: CEDIC]

4. A Matilde, mãe de 4 filhos (Joana, Raquel, Marco e Filipe), escolhe sempre dois para a ajudarem nas tarefas do dia a dia. De quantos modos distintos é que ela pode fazer a escolha?
Durante o mês de Agosto a Teresa, prima dos quatro irmãos, vai sempre para casa da Matilde, que como é lógico a inclui no grupo de ajudantes. Com a ajuda do resultado anterior, podes dizer de quantos modos distintos é que os cinco se podem agrupar aos pares para executar as tarefas diárias?

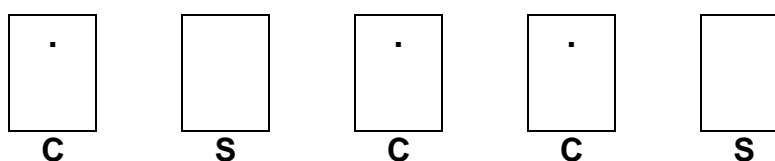
[Retirado de: Martins, M. E., Monteiro, C., Viana, J. P. & Turkman, M. A. (1999). *Probabilidade e Combinatória: matemática – 12.º ano de escolaridade* (Brochura de apoio aos programas ajustados de Matemática 12.º ano). Lisboa: Ministério da Educação.]

Tarefa: “À Descoberta do Triângulo de Pascal

1. De quantas maneiras diferentes podemos colocar três bolas iguais em cinco caixas iguais, colocando apenas uma em cada caixa?

Sugestão:

Podes fazer uma codificação: a presença de uma bola numa caixa pode ser anotada com a letra **C** e a ausência com a letra **S**, por exemplo:



2. De quantas maneiras diferentes podemos colocar quatro bolas iguais em cinco caixas, colocando apenas uma em cada caixa?

3. Completa a tabela:

Número de bolas	0	1	2	3 ⁽¹⁾	4 ⁽²⁾	5
Número de colocações diferentes						

(1) Obtido no item 1

(2) Obtido no item 2

4. Completa a tabela considerando o seguinte problema:

“De quantas maneiras diferentes podemos colocar x_i bolas em n caixas.”

$$(\mathbf{x}_i \in \{0, 1, 2, \dots, n\}; \mathbf{n} \in \{0, 1, 2, \dots, 6\})$$

		Número de Bolas						
		0	1	2	3	4	5	6
Número de Caixas	1							
	2							
	3							
	4							
	5 ⁽³⁾	1	5	10	10	5	1	
	6							

(3) Obtido no item 3

Nota: Cada caixa só pode conter apenas uma bola

5. Triângulo de Pascal

[illegible]

5.1. Escreve a 7ª linha do Triângulo de Pascal.

5.2. Escreve a linha de ordem **n** do Triângulo de Pascal.

5.3. Propriedades do Triângulo de Pascal.

[Adaptado de: Glaymann, R. J. & Varga, T. (1973). Les probabilités à l'école. Paris: CEDIC.]

Tarefa: Binómio de Newton

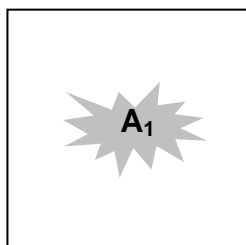
- 1.** A professora de Matemática apresentou na aula um cubo de aresta **a** unidades de comprimento e pediu aos alunos que construíssem também alguns cubos.

A Maria construiu um cubo cujo comprimento da aresta excede o da aresta da professora em **b** unidades de comprimento.

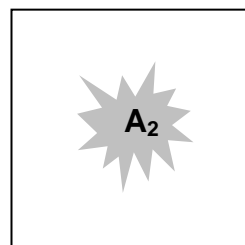
1.1. Escreve uma expressão simplificada da área de cada face do cubo da Maria.

1.2. Escreve uma expressão simplificada do volume do cubo da Maria.

- 1.3.** Observando as faces do cubo da Maria o João decidiu criar um jogo. Desenhou uma figura F_1 de área A_1 numa das faces e numa outra uma figura F_2 de área A_2 , construindo dois alvos:



F_1



F_2

O João (F_1) e a Ana (F_2) lançam em simultâneo, cada um uma seta, para o respectivo alvo, e sabe-se que os dois acertam sempre num ponto dos respectivos quadrados.

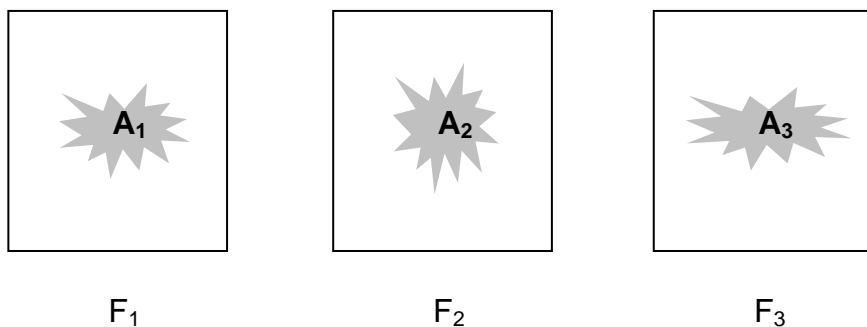
1.3.1. Considera a questão:

“Qual a probabilidade dos dois acertarem nas respectivas figuras?”

Indica o significado, no contexto apresentado, de $(a+b)^4$ e escreve uma expressão simplificada desta potência.

1.3.2. O João decidiu criar outro alvo para assim poderem jogarem três amigos.

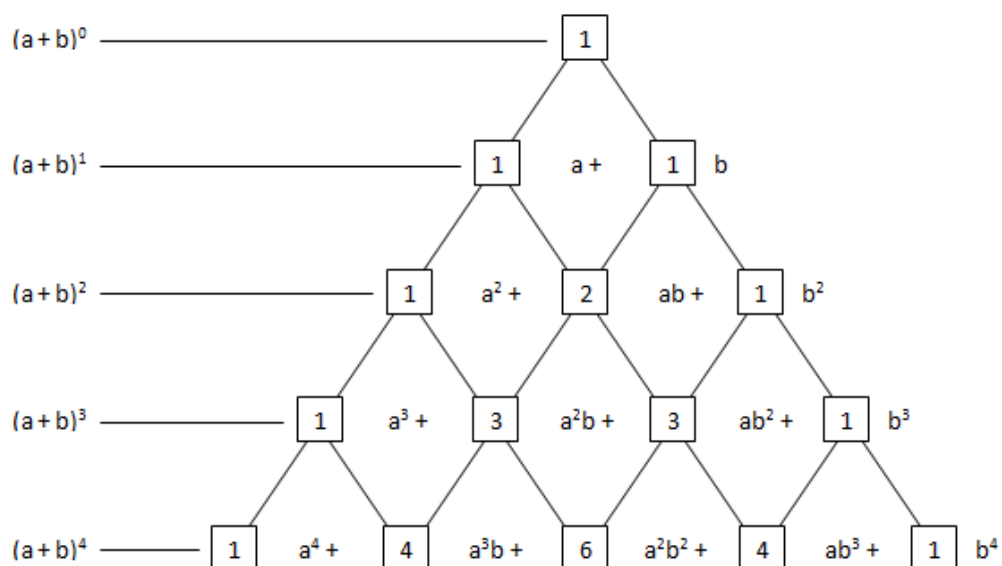
Numa outra face do cubo da Maria construiu uma figura F_3 de



O João (F_1), a Ana (F_2) e o Luís (F_3) lançam em simultâneo, cada um uma seta, para o respectivo alvo, e sabe-se que os três acertam sempre num ponto dos respectivos quadrados. Indica uma expressão que represente o número de casos possíveis nesta experiência.

2. Binómio de Newton

Observemos o seguinte padrão:



[Retirado de: Neves, M.A., Guerreiro, L. & Moura, A. (2005). Probabilidades, *Matemática A 12.º ano – 1.ª parte*. Porto: Porto Editora.]